CONSEJO NACIONAL DE ENSEÑANZA PRIMARIA Y NORMAL

DEPARTAMENTO TECNICO

ENCICLOPEDIA DE EDUCACION

HARDI FISHER

DIDACTICA DE LA INICIACION MATEMATICA EN LA ESCUELA PRIMARIA

EPOCA III. AÑO XVIII, Nº 1 ENERO 1958

MONTEVIDEO IMPRENTA NACIONAL URUGUAY

CONSEJO NACIONAL DE ENSEÑANZA PRIMARIA Y NORMAL

DEPARTAMENTO TECNICO

ENCICLOPEDIA

DE

EDUCACION



EPOCA III. AÑO XVIII, Nº 1 ENERO 1958

MONTEVIDEO URUGUAY

ENCICLOPEDIA
DE
EDUCACION

EPOCA III. AÑO XVIII, Nº 1 ENERO 1958

HARDI FISHER

Didáctica de la Iniciación Matemática en la Escuela Primaria

Traducido especialmente para Enciclopedia de la Educación por Carlos Castellucci.

INTRODUCCION

Este estudio se dirige a los maestros preocupados por mejorar su enseñanza de la iniciación en las matemáticas. Está fundado sobre los últimos resultados de la sicología y proporciona la ocasión de confrontar los métodos y de eliminar algunas dudas. Pretende aportar algunas sugestiones útiles de orden didáctico para tratar de mejorar una enseñanza considerada difícil.

Recurriremos, primeramente, a la pedagogía comparada. Revisaremos, para comprenderlos mejor, los principales métodos que, sucesivamente, se han propuesto y empleado, tratando de relacionarlos con las teorías sicológicas sobre las que han sido fundados, tanto consciente como inconscientemente. En nuestras investigaciones nos limitaremos a la didáctica de la iniciación matemática, lo que nos llevará a distinguir tres tendencias principales que han prevalecido en esa enseñanza, según que predominasen los factores verbales, gráficos o intuitivos y los factores activos. En realidad se trata de tendencias porque, en ningún momento, ninguna de esas características se ha presentado en estado puro. En toda enseñanza se apela simultáneamente a esas tres tendencias pero con el predominio de una u otra, siguiendo tal o cual concepción pedagógica o sicológica. Resulta también que esas concepciones representan un papel y tienen una importancia distinta según las edades de los alumnos. Actualmente existe casi unanimidad de pareceres en reconocer el valor de las manipulaciones para los pequeños de

4 a 8 años, manipulaciones a las que va a suceder, poco a poco, en el curso de la escolaridad, la obligación de recurrir a la representación, a la imaginación y a la abstracción.

Por lo tanto parecería que existe el pasaje de la actividad manual de los niños a la actividad del espíritu. El problema que nos preocupa y que estudiamos consiste en descubrir cómo es que la pedagogía actual trata de establecer ese lazo, ese pasaje de la experimentación en lo real al razonamiento matemático, despojado de todo vínculo con lo concreto.

La teoría sicológica de Jean Piaget aporta una respuesta a ese problema. Pero ocurre que sobrepasa el cuadro de la sicología del niño para vincular, también, los fundamentos del razonamiento matemático con la lógica y con la teoría del conocimiento. Esto es lo que nos llevará a veces a recurrir a los métodos del análisis lógico.

Al hacer el examen de la evolución de la enseñanza de las matemáticas surgen otros problemas. Toda concepción concreta, utilitarista, práctica, es reemplazada poco a poco, por una concepción más formal, axiomática. No basta con que el niño obre por sí mismo sino que también es necesario el acuerdo sobre la naturaleza de la acción en juego. Esas primeras acciones de los pequeños alumnos consisten en disociaciones y reuniones, descomposiciones y recomposiciones, ordenaciones o cambios, correlaciones, colocación de objetos, etc. El aspecto físico de esas acciones concretas infantiles es, generalmente, muy visible. Estas breves comprobaciones provocan las críticas de que la enseñanza de la escuela activa sería contraria a la naturaleza misma de las matemáticas, por no ser estas experimentales y si puramente formales. Por eso la explicación de las acciones sólo debería hacerse en función de los objetos mismos, a fin de no arraigar el pensamiento matemático en lo real sino en lo abstracto. Pero es posible distinguir, en el niño, distintos tipos de acción, de los cuales uno sería el de las coordinaciones sucesivas de los actos mismos, que de ese modo se encontrarían vinculados unos con otros. ¿No sería en esa sistematización progresiva de las acciones de disociación, de reunión, de coordinación, etc. que habría que buscar las bases del pensamiento matemático y formal?

Por razones de orden práctico debemos limitarnos a las numerosas realizaciones antiguas y modernas de la iniciación matemática del jardín de infantes y de la escuela primaria. Nos hemos basado en los problemas de la introducción de las nociones elementales del número entero y de la fracción. Esto nos ha permitido estudiar y exponer los dis-

tintos sistemas didácticos partiendo de hechos precisos. Por lo tanto, basándonos en las dos nociones elegidas, trataremos dos edades diferentes. Por último, hemos intentado generalizar las concepciones pedagógicas y sicológicas sobre la base de hechos citados.

Hardi Fisher
Colaborador de la Oficina Internacional de Educación

PARTE PEDAGOGICA

I. — La enseñanza verbal

La enseñanza verbal se caracteriza porque acuerda una importancia primordial a las palabras y a los símbolos en general, mientras que las ideas subyacentes, que representan sólo un papel derivado, se relacionan entre sí mediante un simbolismo convencional. Esta enseñanza aparece bajo distintas formas pero las más conocidas son la enseñanza mecánica y la enseñanza formal.

La enseñanza mecánica se confunde con una técnica puramente utilitaria: se persigue, esencialmente, la rapidez de las operaciones efectuadas, la aplicación de los mecanismos que intervienen cotidianamente, etc. sin que se otorgue demasiada importancia a la comprensión real de los alumnos.

La enseñanza formal, que es otra forma típica de ciertas técnicas de la didáctica matemática, se basa sobre las definiciones que son como las piedras de un edificio construído por deducciones sucesivas. El que las matemáticas se presten fácilmente a una tal concepción se debe a la parte de convención que interviene en ellas. En efecto, nadie podría impedir que el matemático cambiase el sistema decimal por un sistema duodecimal, definiendo las bases numéricas con ayuda de las teorías que le conviniesen.

Un estudio histórico de la enseñanza matemática señala que al principio triunfó la axiomática con toda su intransigencia. La enseñanza era una transmisión verbal de una verdad revelada, una obediencia a las reglas, un saber que reposaba exclusivamente sobre la memorización de los teoremas. Las matemáticas eran una ciencia abstracta y axiomática, que se enseñaba en forma verbal, es decir, por simple transmisión del lenguaje (o con la ayuda de algún simbolismo convencional), sin intuición ni acción real prelimi-

nar. Tal era la idea que se tenía, generalmente, de la enseñanza de las matemáticas antes del movimiento de reforma pedagógica.

La enseñanza, que no tenía en cuenta la edad de los alumnos, era **formal** y los manuales, de acuerdo con las indicaciones de los detallados programas escolares de entonces, comprendía una primera parte de definiciones seguida de numerosas aplicaciones.

En una antigua didáctica de Hamblin Smith (1890), titulada "Aritmética", que también servía de manual para los alumnos, se encuentran las siguientes definiciones concernientes a la noción de número:

"Sección I: Sobre el método de la representación de los números por cifras".

"1. La aritmética es la ciencia que enseña el empleo de los números".

"2. El número **uno** o **unidad** es tomado como base de todos los números y todos los otros números derivan de él por el procedimiento de la **adición**".

"Así

"Dos es el número que resulta de la adición de uno y uno. Tres es el número que resulta de la adición de uno y dos. Cuatro es el número que resulta de la adición de uno y tres, etc."

Veamos otro ejemplo:

"Sección XI: Fracciones.

"58. Los números son las medidas de las cantidades. **Una cantidad** es todo lo que puede ser considerado como formando parte de un todo. Así una suma de dinero es una cantidad puesto que podemos considerarla como estando compuesta de parte del todo".

"59. Ahora podemos concebir que la unidad de las medidas puede estar dividida en un número de partes de igual tamaño".

"60. Una fracción es una expresión que representa una o varias partes iguales de una unidad".

La enseñanza formal aparece mejor ilustrada todavía en los siguientes ejemplos tomados del manual metodológico de Douzat.

Vemos primero una definición que, según él, es clara y nítida: "Cuando para medir un tamaño se tiene necesi-

dad de recurrir a una parte alícuota de la unidad, si esa parte está concebida en la unidad un número entero de veces representado por una potencia cualquiera de 10, el número fraccionario que es expresión de la medida se llama, en este caso particular, número fraccionario decimal o más simplemente número decimal".

A las definiciones matemáticas les suceden explicaciones por medio de ejemplos o de aplicaciones numerosas y repetidas. Los diferentes capítulos de la aritmética "están acompañados de numerosos ejercicios destinados a asegurar la comprensión tan perfecta como sea posible de las explicaciones teóricas y de algunos problemas de aplicación dados a título de ejemplo".

Ese tipo de enseñanza lleva a un adiestramiento del alumno para la utilización de las reglas, es decir, a una enseñanza **mecánica.** Las definiciones están dadas sobre la base de las que ya se han hecho, como lo hemos comprobado, así como sobre deducciones formales, pero esas definiciones preliminares deben ser consolidadas por numerosos ejercicios y aplicaciones automáticas de las reglas. sin que la comprensión previa de las definiciones sea necesaria. Según los antiguos manuales las nociones, como por ejemplo las fracciones decimales y las fracciones ordinarias, son introducidas mediante "ejercicios preparatorios" que conducen a las reglas. Así desde el comienzo de la enseñanza se aplican recetas aún admitiendo que no puedan ser comprendidas; esas recetas son dadas por definiciones y sólo las repeticiones y las aplicaciones de esas definiciones conducirán al niño a la comprensión. Esa es la razón por la cual la enseñanza formal y la enseñanza mecánica son complementarias y los alumnos que reciben dicha enseñanza tienen que hacer largas series de ejercicios, sin relación con la realidad de la vida cotidiana y sin que exista ninguna vinculación entre esos ejercicios y el interés del niño.

Veamos, a título de ejemplo, lo que se puede leer en una obra de didáctica de la aritmética editada en 1914: "Nothing but drill after drill, day after day, week after week, and month after month, will fix these memory facts", (sólo los ejercicios repetidos, día tras día, semana tras semana y mes tras mes fijarán los hechos en la memoria) (1). Los

---

(1) **What does Research say about Arithmetic?**, Informe preparado por Vincent J. Clemon y C: W: Hunnicut para la Association for Supervision and Curriculum Development. Washington 1952. Pág. 24.

manuales de esa época prueban igualmente que las tendencias al ejercicio repetido no son características de un cierto período de la escolaridad sino que son casi generales. No se hace ninguna diferenciación genética entre el desarrollo del pensamiento matemático de los niños del primer año escolar y los estudiantes de la universidad.

¿Qué subsiste actualmente de la enseñanza verbal? Asombra encontrar todavía algunas reminiscencias de la enseñanza formal y mecánica bajo las formas exageradas que se describen a continuación.

En los programas de la Unión Sudafricana (Natal) se puede leer:

"La edad de los niños de los cuatro primeros años de la escuela primaria es normalmente la que mejor conviene para formar automatismos y fijar hábitos. Los maestros no deben perder de vista esto y deben esforzarse, por consecuencia, en hacer aprender bien las tablas". Así, aunque la enseñanza mecánica es mantenida, se le reserva una etapa limitada del desarrollo infantil. Por el contrario en un "Report of the Orange Free State Department of Education" de 1928, es decir, de un país también miembro de la Unión Sudafricana, la opinión es contraria a una excesiva mecanización. Hasta ahora el tiempo previsto para la enseñanza de la aritmética ha superado en mucho el tiempo previsto por los programas oficiales de las escuelas primarias. Las labores escolares sólo comprenden, prácticamente, ejercicios aritméticos y el trabajo proporcionado es todavía, en general, demasiado mecanizado.

El ejemplo citado no ha sido dado para demostrar que el Estado Libre de Orange es más atrasado que otros países, sino para probar que corresponde a nuestro problema lo que A. J. van Zyl dice:

"Trabajo mecánico sobre un gran número de ejemplos en lugar de ejemplos más simples que hayan sido comprendidos y ausencia completa de un trabajo práctico" (1).

Otra característica de la enseñanza mecánica, apartando la de no suscitar el interés del niño, es la falta de relación de los ejercicios que se les exigen, con la vida real. Ballard cita dos ejemplos significativos, aunque tomados de dos manuales para la enseñanza secundaria. El primero se refiere

---

(1) van Zyl, Abraham, Johannes: **Mathematics at the Cross Roads**; Maskew Limited, Cape Town, 1942.

a una adición de fracciones ordinarias que se podría resolver, con ventaja, por medio de las fracciones decimales: (1)

$$\frac{11}{17} \quad \frac{31}{51} \quad \frac{267}{357} \quad \frac{5}{13} \quad \frac{24}{39}$$

El otro es un ejercicio de seriación de fracciones ordinarias:

$$\frac{67}{92} \quad \frac{54}{85} \quad \frac{56}{79} \quad \frac{196}{237}$$

Es difícil comprender, en efecto, la utilidad inmediata de tales ejemplos en la vida diaria, donde sólo intervienen problemas de fracciones simples y sólo podrían justificarse invocando una gimnástica mental dudosa.

Las críticas de los pedagogos se multiplican. Las experiencias didácticas o las investigaciones sicopedagógicas han puesto en duda el valor exclusivo de los automatismos y del formalismo.

Si el niño repite sin cesar la misma cosa, sin variantes, decimos que está sometido al "drill". El "drill" es una repetición que no apela a las fuerzas creadoras. Si el "drill" es aplicado, como en los ejemplos citados anteriormente, antes de haber adquirido la comprensión total de la operación considerada, se atenta contra el desarrollo de la comprensión matemática del niño. Un ejemplo actual que muestra si el niño ha comprendido bien tal o cual noción o tal o cual operación adquirida por "drill" es el de la división de las fracciones ordinarias. "Para dividir por una fracción se la multiplica invertida". Si se pide a los mismos niños, con un año de intervalo, que resuelvan esta operación, contestarán que no se acuerdan de lo que hay que hacer. Louis Johannot realizó una investigación consistente en examinar las respuestas de adolescentes respecto a la resolución de $\frac{1}{2}$ constatando que aún los que conocían la regla no sabían encontrar el resultado justo. (2) Por el método del "drill" se arriesga automatizar momentáne,amente una regla sin sig-

---

(1) Ballard P. B.: **Teaching the essentials of Arithmetics.** University of London Press, London 1937.

(2) Johannot Louis: **Le Raisonnement mathématique de** l'adolescent. Delachaux et Niestlé, Neuchatel et Paris, 1947.

nificación para el niño o bien se excluye, demasiado rápidamente, todo razonamiento reemplazándolo por automatismos. Es así que se puede observar amenudo a niños que, queriendo acelerar los automatismos exigidos, confunden operaciones tales como la adición y la multiplicación, ya que el razonamiento no representa ningún papel en esos ejercicios. Y ocurre que a veces los niños que cometen esos errores se encuentran entre los mejores de la clase.

El "drill" como factor del proceso del "learning" (aprendizaje), tan típico para su época, se ha modificado considerablemente estos últimos años. Las preocupaciones a las que respondía son siempre las mismas pero con una forma nueva: ya no se trata, en la escuela moderna, de aplicar un "drill" para aclarar poco a poco tal o cual significado, sino reemplazar el aspecto mecánico de la enseñanza matemática por la práctica. Es cierto que el aspecto inmediato de esa práctica se parece, amenudo, al antiguo "drill", pero sin embargo su función es muy distinta. Mientras que el "drill" es una pura automatización, la práctica, según Burton, en la escuela moderna, se presentaría según dos fases complementarias, a saber: a) la fase de la integración, durante la cual los significados serían desarrollados; b) la fase de la repetición o fase de afinación, durante la cual el trabajo se facilitaría y la precisión se desarrollaría. (1)

La fase de integración exige en la práctica una gran variedad, lo que conduce a numerosos contactos funcionales o a actividades de exploración. La fase de afinación exige una práctica repetida. La práctica variada de la primera fase sólo ayuda a apreciar significados, pero sin ningún otro progreso; la práctica repetida de la segunda fase produce un cierto progreso, pero sin estímulo para la comprensión. Hay una cosa cierta: la práctica variada de la primera fase, aplicada convenientemente por los niños, reduce sensiblemente el número de los ejercicios prácticos repetidos que necesitará el niño durante una segunda fase de adquisiciones matemáticas. Es así que se puede llegar a la conclusión que la segunda fase de los ejercicios repetidos, desde que se basa sobre una práctica variada preliminar, ya no representa el mismo papel que el "drill" de la escuela tradicional, pues no sirve para desarrollar la comprensión y la significación de los conceptos y en cambio funciona como regulador de las precisiones y de las fijaciones. En el proceso del

---

(1) Burton Williams H.: **The guidance of learning activities.** Appleton, Century, Crofts, Inc. New York, 1944.

aprendizaje, el papel de los ejercicios repetidos en la escuela moderna debe pues ser considerado como muy poco importante y los próximos capítulos tratarán, precisamente, de los métodos utilizados para desarrollar la primera fase de la construcción de los conceptos.

No se puede poner fin a estas consideraciones sobre la enseñanza verbal sin mencionar el papel desempeñado en la enseñanza de las matemáticas por el cálculo mental. Si se lo considera como una automatización de las combinaciones numéricas, representa simplemente el papel de un "drill". Pero si el cálculo mental sirve para la interpretación de estados cuantitativos, para el enriquecimiento y para la precisión del vocabulario matemático, de una manera definida o indefinida y teniendo en cuenta la realidad, supera entonces ampliamente el automatismo puro y representa por lo tanto un factor importante del aprendizaje matemático. De este modo el cálculo mental es una aplicación de las diferentes operaciones matemáticas reativas al sistema numérico sin un empleo explícito del algoritmo.

La enseñanza verbal se opone a la enseñanza de la escuela nueva que aplica el método heurístico, que admite la discusión, provoca descubrimientos y búsquedas para que los alumnos reconozcan los teoremas, extraigan reglas y establezcan axiomas. Si el error cometido por el alumno constituye, en la enseñanza dogmática "una vergüenza inexplicable" (1), el error en la enseñanza heurística es sólo un accidente fácilmente reparable y aún instructivo puesto que enseña que esa no es la verdad.

II. — La enseñanza gráfica e intuitiva

Asombra comprobar que el presentimiento de soluciones posibles y aun probables se manifieste en el pensamiento matemático desde su formación. La intuición matemática es el conocimiento que se adquiere de los fenómenos numéricos, algebraicos o geométricos sin que haya intervención de un razonamiento que constituya una verificación analítica. Es así que se manifiesta la belleza de las matemáticas: en la anticipación global del resultado posible, suscitando demostraciones múltiples. Para el adulto hay equilibrio entre la intuición y el razonamiento matemático, puesto que toda intuición provoca el deseo de convencerse a sí

(1) Fouché A.: **La pédagogie des mathématiques.** Presses Universitaires de France, Paris, 1952.

mismo o de convencer a otro, a fin de probar que ella era exacta: en sentido inverso, toda demostración o toda verificación suscita la intuición de la solución o de soluciones mejores y nuevas.

¿Ocurre lo mismo con el niño? Las opiniones de los pedagogos están divididas: los precursores de la enseñanza gráfica e intuitiva, tales como W. A. Lay y Johannes Kühnel, defienden la tesis según la cual ciertas imágenes bien definidas suscitan la intuición necesaria a la comprensión. La imagen representa el papel de un índice facilitando la anticipación del resultado. Otros pedagogos, tales como María Montessori por ejemplo, agregan a la percepción de imágenes ejercicios sensoriales de exploración activa, con la ayuda de manipulaciones concretas de objetos igualmente bien definidos.

Las proposiciones más recientes mantienen la idea fundamental de la intuición considerada como fuente de toda comprensión ulterior. Pero si bien unos quieren aumentar la parte de la intuición por imágenes más variadas y más vivas (Johannes Wittmann, por ejemplo), otros como Friedrich Drenckhahn, distinguen etapas genéticas que limitan la utilización del método intuitivo a un momento determinado del desarrollo mental, durante el cual el niño no es capaz de los razonamientos más simples. La mayoría de las didácticas para la enseñanza gráfica e intuitiva consideran la intuición un medio de despertar en el niño fuerzas creadoras, como lo piensan sobre todo Emma Castelnuovo, Nicolet y otros que preconizan las técnicas modernas de la enseñanza por el film.

En fin la enseñanza gráfica e intuitiva tiene un significado bien distinto desde que se la considera importante para la fijación de las ideas, como lo ha propuesto Maurice Béguin introduciendo sus fichas de trabajo de las fracciones como instrumento en su clase de 6.o año primario.

La intuición matemática hace prever las soluciones posibles: está constantemente dirigida hacia lo nuevo y hacia lo desconocido. Pero puede ser engañosa y conducir a ambigüedades y aun a falsas soluciones, de tal modo que es necesario volver atrás y recomenzarlo todo. ¿Pero quién no ha conocido una cierta esterilidad de pensamiento cuando éste está fijado por la intuición en un sentido único que impide volver atrás! Entonces se es víctima de una situación rígida que paraliza toda nueva investigación. Según ciertos pedagogos es en ese caso que hay que ver los peligros de la intuición.

Ahora estudiaremos las tendencias mencionadas eligien-

do, entre las numerosas proposiciones pedagógicas, las que nos parecen más representativas de los diferentes tipos de escuelas, comenzando por las más antiguas.

1. — *Las concepciones antiguas*

Al comienzo del siglo, los maestros se dieron cuenta que una enseñanza verbal que se basaba sobre definiciones preliminares y que consistía en transmitir oral y simbólicamente las reglas, leyes y fórmulas matemáticas, era insuficiente y que un gran número de alumnos, si no la mayoría, eran incapaces de seguir con éxito dicha enseñanza, con excepción de aquellos que tenían una buena memoria. Se trataba de hacer la enseñanza más comprensible y más accesible al niño. Para este problema había dos soluciones posibles: mantener las definiciones y las explicaciones verbales preliminares para profundizarlas luego por otros procedimientos o tratar de introducir en la escuela técnicas que pudiesen suscitar una comprensión intuitiva, dándose luego oralmente el enunciado de las definiciones y de los teoremas. Por lo tanto la segunda solución marca el comienzo de una enseñanza heurística.

La inteligencia formal e hipotético - deductiva, así como el pensamiento abstracto son indispensables para la comprensión, si se elige la primera solución, es decir, una enseñanza en donde las explicaciones suceden a las definiciones, en donde la imaginación e intuición no representan ningún papel en la génesis de las nociones y de las operaciones matemáticas. Se prefiere verificar o aclarar por el dibujo las definiciones dadas anteriormente. Se trata de ese modo de ilustrar la enseñanza verbal y esforzarse por establecer un lazo entre los definiciones preliminares y las imágenes de la vida real, sin que éstas sean la causa misma de la construcción de conceptos.

Sin embargo, las concepciones de la enseñanza cambian completamente desde que las imágenes y las representaciones intuitivas son utilizadas como medio de adquisición, es decir, como técnica de aprendizaje. Las imágenes son susceptibles de provocar intuiciones al mismo tiempo que se transforman en representaciones. Tales eran las ideas de W. A. Lay y de Johannes Kühnel, el primero un precursor de la pedagogía experimental, el segundo un práctico cuya influencia se hace sentir aún hoy en los países de lengua alemana. Si estos dos pedagogos son los más representativos, en lo referente a la antigua didáctica de la enseñanza gráfica e intuitiva por medio de los "esquemas gráficos",

otros han preconizado la intuición como medio de introducción de las nociones matemáticas en la escuela primaria, pero sin basarse en los esquemas gráficos.

Ese es el caso de la pedagogía de María Montessori que reemplaza los esquemas gráficos por un material concreto, que provoque intuiciones, pero que permita, también, un contacto real por medio de una exploración activa y sensorial. La discusión de estas tres teorías abarca, a nuestro parecer, el examen de la totalidad del contenido de las antiguas didácticas de las matemáticas elementales. Después de haber expuesto esas teorías procederemos a un análisis crítico y las confrontaremos con las tendencias modernas semejantes pero ya más evolucionadas.

W. A. Lay, que practicaba la pedagogía experimental en Alemania, tuvo la idea de introducir en la clase de primer año primario esquemas gráficos consistentes en representaciones intuitivas de los números, lo que ayudaba al niño a familiarizarse con la noción de número. Al mismo tiempo observó a los niños para darse cuenta de las ventajas y desventajas de ciertos esquemas figurativos utilizados esporádicamente en su tiempo. Primero comprobó que el niño, siempre que las imágenes presentadas sean claras y nítidas, reconoce simultáneamente las pequeñas cifras de base, la cifra 4 por ejemplo, cuando se expone la imagen : : empleando menos de un segundo. Aquí habría un fenómeno de sincretismo o función de globalización (impresión), seguido de análisis y síntesis (asimilación). Los resultados de las investigaciones de Lay pueden resumirse así: los esquemas cuadráticos tales como:

∷ ⁘ 7, ∷ ∷ • 9. etc.,

se adquieren, al parecer, más pronto que todos los otros y en consecuencia son preferibles para la iniciación en los números: los esquemas gráficos pueden englobar los números hasta 10 y más, para crear la representación de los números, mientras que las representaciones seriales sólo alcanzan el número 3; en fin, la noción de número no está basada sobre la numeración hablada, sino que la numeración sucede a la noción de número.

De ese modo la noción de número se basa únicamente sobre la representación, que está fundada sobre objetos que forman un grupo en el espacio (representación espacial) o que se presentan sucesivamente (representación temporal). El grupo de objetos en el espacio es preferible a toda repre-

sentación sucesiva en la duración. La abstracción, cuyo mecanismo no se comprende muy bien de acuerdo a las ideas de Lay y sus discípulos, resulta más rápida y más fácil de una observación minuciosa o de una exploración de objetos cuyas características son simples, regulares y siempre las mismas. (1).

Tampoco hay, para Lay y sus discípulos, una sola noción de número, sino una pluralidad de seres numéricos que se adquiere sucesivamente siguiendo el orden de tamaño. Si el arreglo, es decir, la estructura perceptiva debe ser la misma para una de esas nociones, la libertad didáctica, sobre todo para la iniciación, consiste en representar esas estructuras idénticas y fijas no sólo por puntos (esquemas gráficos) sino por cualquier medio concreto o gráfico, tales como imágenes de frutas, de muñecas, etc.: en resumen con la ayuda de estructuras perceptivas similares.

Para facilitar las diferentes impresiones, es decir, para limitar al mínimo la colección de imágenes, Lay propone utilizar un esquema gráfico único para cada número, lo que contribuirá a fijar mejor las representaciones. En lo referente a los esquemas de los números de potencia más importantes sería preferible, además, hacer resaltar, como una especie de subestructuras, los esquemas gráficos ya utilizados para los números menos importantes (los gráficos cuadráticos mencionados anteriormente).

Algunos años después de las proposiciones de Lay para mejorar la enseñanza del cálculo, Johannes Kühnel volvió a tomar sus ideas fundamentales para desarrollarlas y profundizarlas, estudiando de una manera más general el conjunto de los problemas que pueden surgir en el curso de la iniciación matemática. Nos limitaremos a las proposiciones que hace respecto a la noción de número y a la noción de fracción.

Hemos podido comprender que la noción de número no es, para Lay, una noción dinámica, reposando, por ejemplo, sobre la iteración de la unidad y consiste en una serie de operaciones reales. Según él, la percepción se transforma directamente en inteligencia y los números representan los elementos con los cuales se comienza a operar. Kühnel insiste, también, sobre esto, de tal manera que en clase los niños deberían ocuparse primero únicamente de las diferen-

(1) Schneider Willy: L'enseignement rationnel des premiers éléments de calcul. De Sikkel, Anvers. 1930.

tes nociones de número y luego de operaciones. También sostiene que el niño, para contar, no sentiría, espontáneamente, la necesidad de agregar unos a otros elementos distintos. Al agregar una nueva muñeca a las otras cuatro que la niña ya posee, esta constataría simplemente que hay "una más", sin preocuparse del número del conjunto de muñecas. Así como Lay, también Kühnel, después de numerosas investigaciones, introduce en clase un solo esquema gráfico (por las mismas razones) construído sobre el sistema decimal, pero sin adoptar el modo cuadrático de Lay:

Johannes Kühnel:

W. A. Lay:

Johannes Kühnel deja trabajar a los niños con estas figuras mientras sientan la necesidad. Ellas y las nociones que de ellas derivan representan la materia que se manipula. Después de la adquisición de las nociones individuales de los diferentes números, se las ordena y se obtiene la noción de medida, que es continua, de tal modo que hay siempre asociación entre la representación gráfica de los números, el tiempo, el espacio y las series numéricas.

Por lo tanto, la enseñanza aritmética de Kühnel se basa igualmente sobre las representaciones intuitivas. Pero, para él, estas se completan continuamente por los conocimientos de estructuras precedentes que se integran sucesivamente. Estas integraciones sucesivas se realizan por las actividades de los sentidos (incluídos los ejercicios tactiles), semejantes en esto a los ejercicios de exploración de Lay. Es así que la estimación consistiría en relacionar, estimar, etc., limitándose únicamente como lo hemos visto, por la fijación sobre un único esquema gráfico. La abstracción consistiría en esas integraciones que llevarían a las nociones, a las reglas y a las leyes; como para Lay sería a la vez síntesis y análisis.

Kühnel no se contenta con una percepción pura y simple de los hechos estáticos, por ejemplo de las figuras, sino que insiste sobre la actividad kinestésica en particular y sobre la actividad concreta en general, invitando al niño a analizar la estructura de las cosas al contar. El niño contará los objetos de una imagen (por ejemplo los puntos de un gráfico), agrandando las dimensiones de la estructura (li-

gero cambio de posición de los objetos sin ninguna variación de la estructura perceptiva, etc.); luego, para pasar de la actividad concreta a la actividad mental, el niño, al contar, tocará únicamente los objetos y por último contará el efectivo de una imagen numérica sin tocar y sin mostrar, mirando solamente. Primero se comenzará por objetos reales para continuar por símbolos materiales e imágenes simbólicas, para terminar con símbolos gráficos. Pero siempre, en el curso de estas distintas etapas, la estructura de esas representaciones intuitivas se mantiene fija y la actividad consiste en tocar los efectivos y en contar los objetos. Si Kühnel exige para la enseñanza de las fracciones una profunda comprensión de las operaciones aritméticas, no lo hace de ningún modo porque estas sean indispensables para la construcción de las nociones de fracción sino porque el orden metodológico, para él, debe separar, una vez por todas, las operaciones y las nociones, a fin de no turbar al niño por su presencia simultánea.

Aunque la iniciación en las fracciones se realice siempre más tarde que la iniciación en los números positivos. Kühnel no ve ningún lazo entre esas dos clases de nociones, salvo en que su elaboración es parecida. Para la enseñanza de las fracciones distingue tres etapas. La etapa preliminar, que consiste para el niño en reunir algunas nociones aisladas particularmente simples: las mitades, los cuartos y los décimos; la etapa principal, que agrega simplemente las nuevas nociones particulares: los octavos, los quintos, los vigésimos, los tercios, los sextos y los duodécimos, lo que permite introducir una noción general de la fracción; en fin, una etapa complementaria, reservada a la utilización del conjunto de las fracciones, a la abstracción y a las operaciones más difíciles (desde luego todos los niños no alcanzarán a esta última etapa). La enseñanza de las fracciones decimales se hace según las mismas etapas, pero con un pequeño retardo que está basado sobre una cierta cantidad de las fracciones ordinarias.

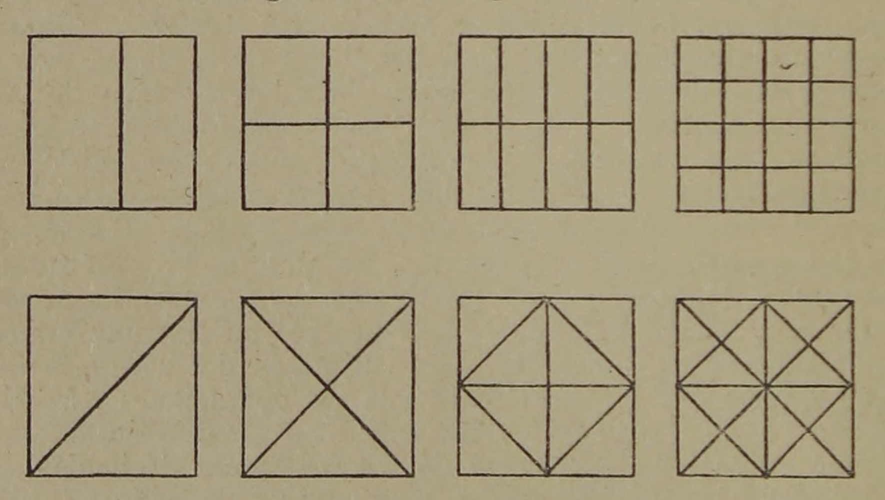
María Montessori introduce en la clase un material concreto y manipulable, para permitir una exploración activa de las estructuras perceptivas no sólo según el esquema de una imagen, sino según el esquema de uno o varios objetos manipulables. También preconiza menos la utilización de las representaciones intuitivas, pero persigue una "intuición material".

Para adquirir la noción de número en una clase montessoriana el niño tiene a su disposición barras de distintas lon-

gitudes (de 10 cm. a 1 m.) que materializan los números, 1, 2, 3, 4, ... 10, por sus diferencias sucesivas iguales (por ejemplo 10 cm.) Cada una de esas barras está dividida en colores alternados, de una longitud constante, correspondiente a la más pequeña de las barras (10 cm.) en rojo y en azul. Todo número está representado por un solo objeto; la barra ahorraría, según Maria Montessori, un esfuerzo mental inútil y le daría claridad a la idea.

Esa comprobación es de cierta importancia: la noción de número así como la noción de fracción está dada por medio de un material contínuo y sólo más tarde, con perlas, por ejemplo, la discontinuidad de los números enteros intervendrá.

Como hemos dicho la noción de fracción deriva de formas geométricas. Maria Montessori ha introducido dos series de formas geométricas de hierro que preparan para la noción de fracción. La primera serie consiste en un estudio del cuadrado y de las figuras que de él resultan a consecuencia de las divisiones geométricas regulares.



Un cuadrado dividido en 2 rectángulos iguales.
Un cuadrado dividido en 4 cuadrados iguales entre sí.
Un cuadrado dividido en 8 rectángulos iguales entre sí.
Un cuadrado dividido en 16 cuadrados iguales entre sí.
Un cuadrado dividido en 2 triángulos iguales entre sí.
Un cuadrado dividido en 4 triángulos iguales entre sí.
Un cuadrado dividido en 8 triángulos iguales entre sí.
Un cuadrado dividido en 16 triángulos iguales entre sí.

El niño puede así intercambiar las figuras de la serie inferior contra las de la serie superior o viceversa y mediante esto, según Montessori, obtendría una intuición de las

figuras equivalentes. A esto no se puede llegar por superposición, ya que cada figura está provista de un botón de presión. Además de estas simples comprobaciones relativas a la equivalencia de las superficies, el niño puede también darse cuenta de las igualdades. Por la simultaneidad de las nociones de igualdad y equivalencia, el niño llega a reconocer las relaciones que existen entre las partes y el todo y entre las partes mismas. Este material de las clases montessorianas sólo sirve para la introducción de una idea intuitiva de las fracciones, Para el estudio sistemático de las fracciones se introduce una segunda serie basada sobre la superficie del círculo: está dividida en 2, 3, 4, ... 10 partes. Al niño se le entrega un transportador con el cual aprende a medir la apertura de los ángulos de los sectores. De este modo comprueba que el ángulo recto mide 90º y sabe que la circunsferencia cuenta 360º.

Es así como el niño puede calcular la apertura del ángulo al centro del sector que representa la séptima parte de la armazón total, por lo tanto 360º: 7 = 51º y el niño puede verificar el resultado calculado mediante el transportador. Es midiendo y con la ayuda del cálculo de las aperturas de los distintos sectores que el niño aprende a seriar y a escribir las fracciones.

Ese material se presta, además, a una multitud de ejercicios de cálculo sobre las fracciones.. El niño puede trabajar con sectores diferentes y sacar conclusiones sobre las equivalencias tal como:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{ o } \frac{2}{2} = \frac{4}{4}$$

(porque tanto la parte izquierda como la parte derecha dan el entero o sea la igualdad).

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{10} = 1 \text{ por empirismo, etc.}$$

Estos ejercicios, así como el primero citado, inician también al niño en la reducción de fracciones a su más simple expresión. Además puede ser extendido a varios círculos.

El pasaje de las fracciones ordinarias a las fracciones decimales se hace por medio de un soporte con formas. El soporte o las formas están divididos en 10 o en 100 a lo largo de la circunsferencia. Basta colocar los sectores de tal manera que un lado coincida con la marca del cero para que se pueda leer inmediatamente la cifra del otro lado correspondiente a la fracción decimal equivalente. Al colocar un cuarto se lee 25 y la fracción decimal correspondiente

es 0.25. Del mismo modo que para las fracciones ordinarias se puede realizar una infinidad de ejercicios, como por ejemplo:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = 0.60 \text{ aproximadamente.}$$

Se reconoce así que, a pesar de la manipulación del niño, la génesis de las nociones matemáticas se hace en función de los datos perceptivos. La manipulación permite variar esas percepciones; el niño puede entonces hacer distintas comprobaciones en el curso de la manipulación. Es en este sentido que María Montessori admite que el niño piensa al utilizar sus manos, lo que suscita progresos de orden intelectual.

La confección del material es tomada de Itard. Todos estos objetos didácticos están analíticamente graduados y sirven para orientar desde el exterior la evolución síquica en contacto con la sensación interna. Esos materiales representaron primero un medio terapéutico para los niños atrasados y en la actualidad son utilizados en las clases montessorianas para los niños normales; tienen la ventaja de estimular el interés y favorecen así la auto educación. El material está construído de manera que el niño pueda desarrollar sus funciones sensoriales por la aplicación de movimientos a su alcance.

La estructura del espíritu se forma gracias a esos puntos de apoyo materiales, hasta que llega un momento en que la estructura mental y el medio objetivo se emparentan por medio de una especie de correspondencia biunívoca. Por lo tanto, la educación consiste en proporcionar al niño un material bien adaptado a su grado de desarrollo, como si se tratase de un alimento que necesitase el niño. Ese alimento es racional cuando se trata de desarrollar las estructuras mentales. Por eso el material contribuye no sólo a hacer funcionar ciertas aptitudes sino también a regular su funcionamiento.

El pasaje de lo concreto a lo abstracto y por lo tanto de las sensaciones a las ideas, según Montessori, se hace siempre de la misma manera, esforzándose por colocar al niño en una situación tal en la que un solo factor funcione aisladamente. Así se ejercitará la visión sin apelar a ningún ruido, etc. La segunda etapa consistirá en reemplazar un factor por otro de naturaleza secundaria, pero siempre para el mismo ejercicio. Así la percepción directa será reemplazada por el ejercicio tactil, como por ejemplo reconocer con los ojos cerrados distintas formas y superficies.

En resumen podemos decir: el principio de la utilización del material reside en la presentación, en forma concreta y en un orden de complejidad creciente, de nociones siempre más abstractas, tales como las exige la vida social actual. Al comprobar la influencia considerable sobre los niños del material manipulado, Montessori puso en evidencia lo que se llama la intuición material en el cuadro de la sicología del niño y sacó las consecuencias perfeccionando progresivamente su material; llegó así a establecer que la educación consiste en facilitar la marcha de lo simple a lo complejo, del fragmento al conjunto diferenciado. La vida síquica comenzaría así por funciones perceptivas y motrices y éstas estarían juxtapuestas o integradas. El pensamiento abstracto es el resultado de la experiencia anterior de naturaleza sensorial y concreta. Pero, a pesar del cultivo sistemático de la motricidad en la enseñanza que Montessori introdujo y a pesar, también, de la importancia que atribuye al cultivo sistemático de los sentidos, considera que esos dos factores son sicológicamente estáticos. Por eso propone orientar las sensaciones sistemáticamente mediante estimulantes representados por el material didáctico: "Los estimulantes, más que la razón de las cosas, son propios a emocionarlo (al niño), es pues el momento de utilizarlos metódicamente, a fin de que las sensaciones se desarrollen racionalmente y que así preparen la base de una mentalidad positiva del niño".

La didáctica consistiría en invitar al niño a registrar metódicamente y de acuerdo a un material sistemáticamente complejo, las impresiones del exterior. Basta pues con elegir bien ese material para que el niño pueda corregir por sí mismo sus errores. Es así como la pedagogía montesoriana se ha vuelto autoeducativa y elimina al máximo la ayuda verbal del adulto.

2. — *Crítica de las concepciones antiguas*

¿Cuáles son las críticas que los pedagogos contemporáneos o aún los antiguos han hecho a las didácticas de las representaciones intuitivas y materiales de Lay, Kühnel y Montessori? ¿Qué es lo que de ellas puede retener la didáctica moderna?

Las críticas son de dos clases: de carácter pedagógico (enseñanza desde el exterior, falta de relación con la realidad, enseñanza colectiva, pasividad individual); de carácter sicológico (visión genética errada o incompleta).

Desde el principio la enseñanza gráfica e intuitiva trata de despertar en el niño fuerzas creadoras por medio de la intuición.

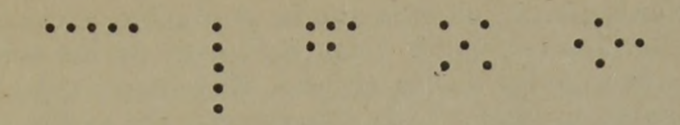
La intuición, que puede resultar del estudio perceptivo de las imágenes, le da a la enseñanza un carácter más vivo y el niño es incitado a construir por sí mismo las nociones matemáticas. Sin embargo, es lícito preguntarse si la intuición sola corresponde ya a una actividad mental y como por los ejemplos citados se trata de una enseñanza inculcada, hay que suponer que la actividad del niño está reducida al mínimo. La imagen sola, concebida como un instrumento que permite asir las nociones por medio de las percepciones, no es suficiente, si las relaciones cuya existencia ella permite constatar no son construídas previamente por el niño mismo. Es dudoso que la enseñanza gráfica e intuitiva sea de carácter heurístico.

El que la casi totalidad de los autores de esquemas gráficos, Lay, Kühnel y otros, así como la misma Montessori con su material concreto, se detengan en el número 10, como si este número representase un límite natural y no convencional, es la prueba de que se trata de una enseñanza inculcada desde el exterior. Esto también demuestra que todas esas investigaciones no tienen un fundamento objetivo, así como que sus autores han sufrido la influencia contínua del sistema decimal y por lo tanto de un sistema numérico muy particular. También es posible preguntarse si esas representaciones fijadas en una imagen son capaces de hacerse independientes de las relaciones espaciales empleadas. Johannes Kühnel es el único que propone ejercicios de equivalencia variando las relaciones espaciales sin cambiar la estructura, lo que parece indicar que el niño tiene necesidad, para comprender, de establecer ciertas equivalencias. Pero ¿porqué éstas, de manera general (de una estructura a otra), continúan siendo irrealizables en las estructuras únicas de Lay, de Kühnel y de Montessori? Esto es tanto más extraño cuanto que cada uno de estos tres pedagogos (y muchos otros más), después de sus investigaciones, proponen configuraciones gráficas sensiblemente distintas que introducen en clase.

Es también interesante constatar que los pueblos primitivos de Africa son más accesibles a los conceptos mediante el procedimiento de las equivalencias sucesivas, aún cuando no alcancen la abstracción definitiva. Es así que Otto F. Raum cita, a título de ejemplo, que los niños de Africa conocen ya las diferentes disposiciones siguientes para el número 5: (1)

---

(1) Raum Otto: Arithmetic in Africa. Evans Brothers Limited, London.



David Katz insiste sobre dos problemas suscitados por ese método de las representaciones intuitivas: 1.o) cómo habría que representar, al principio, los números de determinado tamaño. El método gráfico e intuitivo, tal como lo proponen los autores citados estaría estrictamente limitado a los números pequeños o a sus repeticiones múltiples (Kühnel). 2.o) Que el niño se fija demasiado tiempo en una configuración particular y tiene dificultad, más tarde, en liberarse de ella. Por eso Katz caracteriza esa enseñanza por una rigidez y estirilidad evidentes.

Ernst Meumann critica la forma de introducir y de servirse de las configuraciones estáticas y en particular de los esquemas gráficos. Considera que éstos han sido elegidos según experiencias sicológicas sin relación alguna con el trabajo escolar. Al exponer un grupo de puntos durante un momento muy corto, se hallará una configuración gráfica "ventajosa", pero la realidad escolar y la vida cotidiana muestran grupos numéricos y conjuntos sin limitación práctica del tiempo de la exposición. Según Meumann habría que obtener para el niño una buena imagen del número representado, que sirviese de base a las operaciones fundamentales de la aritmética. En fin, habría que limitar la utilización de los esquemas gráficos ya que impiden el desarrollo del cálculo abstracto y asociativo.

Sin embargo, es cierto que sólo Kühnel distingue tres factores esenciales en la enseñanza gráfica e intuitiva que le dan a ésta más relieve: ejercer y perfeccionar sistemáticamente los sentidos, impulsar al niño a observar y habituarlo a formar imágenes completas y reales. Meumann no encuentra en esas proposiciones de Kühnel lo que caracteriza la observación sistemática y técnica, por ejemplo, los puntos de vista elementales en una observación, el predominio de los elementos sensibles de lo observado, las cualidades de los sentidos, las proporciones del espacio y del tiempo, la utilización sistemática de esos puntos de vista, el acuerdo del punto de vista del observador con las características del objeto observado. De todo ello puede resultar que el niño adquiera imágenes, es decir, conocimientos, pero que no aprenda a observar. El niño debe aprender a analizar, pues el análisis es una actividad propia de la enseñanza gráfica.

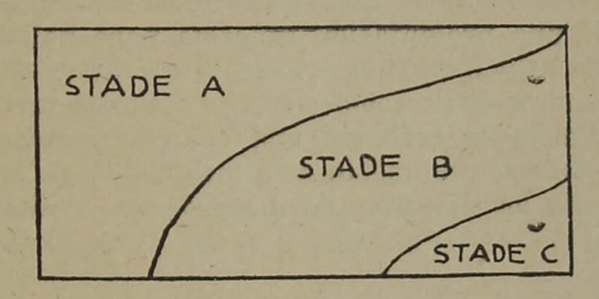
La manipulación de objetos ayuda al alumno a conocer y a comprender las relaciones y las funciones de las cualidades y de las cantidades de los objetos. El análisis del niño por la manipulación hace que la observación sea activa y es en este sentido que Montessori aportó un elemento nuevo a la enseñanza gráfica e intuitiva.

Lay, Kühnel y Montessori utilizan representaciones intuitivas similares para todos los niños y no tienen en cuenta las diferencias de un niño a otro. Su enseñanza se mantiene por lo tanto esencialmente colectiva. Katz distingue entre los distintos tipos de la representación un tipo visual, un tipo acústico y un tipo motor. Para el tipo visual se podrá decir que la representación visual predomina ampliamente, pero nunca se encontrará un tipo puro ya que la mayoría de los niños pertenecen a distintos tipos. El peligro de los tipos puros es evidente en cuanto el maestro los emplea, ya que enseñará de acuerdo a las concepciones del tipo al que le da su preferencia y su enseñanza sólo alcanzará a una parte de sus alumnos.

Pero Katz llega más lejos todavía y examina el mismo problema desde el ángulo genético, (evolución mental). Como él ha descubierto que el tipo visual es más común entre los niños de los primeros años de la escuela primaria se asistiría, por lo tanto, a una evolución de las representaciones en función de la edad· Los métodos de representaciones intuitivas de Lay, Kühnel y Montessori no son entonces utilizables sino en cierta etapa del desarrollo mental del niño, pero los tres pedagogos no tienen en cuenta, en sus métodos, una evolución propiamente dicha.

Según Walter Lietzmann la intuición en el niño difiere según los casos. Considera que se ayudaría mucho al niño si se hiciese preceder la enseñanza sistemática por una enseñanza preparatoria consistente en ejercicios de estimación de longitudes, ángulos, contenidos, superficies, etc., o bien se iniciase al niño en el empleo de representaciones gráficas. La función de esas estimaciones y de esos dibujos sería, para Lietzmann, el desarrollo de la intuición, pero con la diferencia de que los modelos no son simplemente presentados al niño, sino que él mismo los confecciona o mejor aún que la intuición se acompaña de construcciones reales y de dibujos. Así la enseñanza sistemática o formal de las escuelas secundarias debería siempre estar precedida de una enseñanza de informaciones concretas, la teoría precedida por la práctica (como por ejemplo en Inglaterra), lo sistemático (estadio C) por lo deductivo (estadio B) y por lo experimental (es-

tadio A) (Inglaterra y Francia), lo demostrativo por lo intuitivo y por lo observado (Estados Unidos). Hace ya treinta años, durante un estadio experimental A, se evitaba toda demostración y el niño comenzaba a juzgar por sí mismo si llegaba a una convicción por intuición directa o por argumentación; el estadio deductivo B servía para desarrollar el razonamiento deductivo y para acumular hechos objetivos, para permitir, en un estadio C, sistematizar esos conocimientos. Esos tres estadios no están divididos en tres períodos consecutivos sino que amenudo coexisten según el esquema siguiente:



Por lo tanto es precisamente durante los años de la escuela primaria que las representaciones y las intuiciones juegan un papel predominante en las matemáticas.

Más recientemente, matemáticos tales como W. Betz, por ejemplo, han atacado amenudo la enseñanza intuitiva "como un bodrio de impresiones geométricas que el alumno adquiere como tales, con ayuda de una variedad de procedimientos no científicos, desprovistos de organización, que provocan la mayor confusión en las primeras etapas de la geometría sistemática". Es posible que estas críticas sólo prueben que el autor se coloca únicamente al nivel de las escuelas secundarias y hasta en el nivel universitario, sin preocuparse de los niveles de desarrollo mental del niño, así como Lay, Kühnel y Montessori defienden la representación sin tener en cuenta demasiado el pasaje a las etapas ulteriores, abstractas y formales, del desarrollo mental.

En conclusión se puede decir que el niño, en la escuela primaria, se sirve esencialmente de una intuición estática, fundada en las configuraciones perceptivas, porque se descuida demasiado la acción y el factor operatorio que haría más dinámica esa intuición, más anticipatoria y más orientada hacia la verificación. En efecto, la intuición del matemático es muy distinta de la intuición perceptiva: es una anticipación orientada hacia las verificaciones posibles (for-

malizadas en diversos grados) y fundada sobre un mecanismo operatorio esencialmente dinámico. Si se quiere encaminar al niño **en la dirección de la intuición matemática** es necesario, pues, superar sin cesar la intuición perceptiva, para orientarlo hacia las acciones que transforman las configuraciones, sustituyen las **transformaciones** por los **estados** y subordinan por lo tanto esas configuraciones a los mecanismos operatorios, verdaderas raíces de la intuición matemática.

Según la encuesta mundial de la Oficina Internacional de Educación sobre la iniciación matemática en la escuela primaria "los métodos más empleados consisten en partir siempre de una presentación concreta para hallar, por abstracción, los principios subyacentes. Estos métodos, en los cuales los alumnos obran como observadores son, generalmente, llamados "métodos activos" aún cuando no sean evidentemente los únicos que apelan a la intuición", ya que la intuición presenta los distintos significados que acabamos de recordar. (1)

3. — *Las concepciones modernas*

El desarrollo histórico de la enseñanza gráfica e intuitiva nos ha mostrado dos tendencias: alejamiento progresivo de la representación gráfica y un acercamiento de las configuraciones perceptibles compuestas de objetos reales, Estas tendencias se afirman igualmente en la iniciación aritmética actual.

Algunos educadores buscan analizar sistemáticamente la utilización de las imágenes y su abstracción progresiva; citaremos al respecto algunos manuales modernos. Otros educadores distinguen, cada vez más, etapas en el desarrollo de las nociones. En particular, la escuela alemana actual está vinculada a la idea del génesis: Friedrich Drenckhahn y Johannes Wittmann, el primero matemático y el segundo profesor de didáctica, que por azar habitan ambos en Kiel, son de los que favorecen más, actualmente, esas tendencias. Para tratar de suscitar aún más la actividad del niño Carleton Washburne, en los Estados Unidos y Maurice Béguin en Suiza, han introducido, para etapas precias del desarrollo, un material individualizado mucho más rico que ningún manual

---

(1) Initiation mathématique à l'école primaire. Publication UNESCO/BIE, Paris/Genéve, 1950.

y que permite una mayor estimulación del niño. Inspirándose en las indicaciones de los programas escolares oficiales italianos Emma Castelnuevo, matemática de Roma, ha llegado a una gran utilización de la intuición en la escuela, caracterizando el comienzo de la enseñanza de la aritmética, por la creación de situaciones concretas para la edad durante la cual una enseñanza sistemática se hace fecunda. El mismo principio se ha desarrollado por la técnica de los films, especialmente en los Estados Unidos, pero el método suizo de J. L. Nicolet es sin embargo más flexible.

Una de las preocupaciones mayores de todos esos pedagogos es la transición entre las imágenes.

Existe, además, un problema particular que preocupa a los pedagogos: el de la transición entre esas imágenes o esos materiales semiconcretos, como son llamados amenudo, y la noción abstracta del número· William A. Brownell ha emprendido algunas investigaciones sobre este problema y ha comprobado que los alumnos que conocen la adición 4 más 4 igual 8 se niegan a ver una relación entre ese conocimiento y el gráfico (de Lay) : : : : que se les presenta, de lo que saca en conclusión, como Kühnel, que no se debería presentar las operaciones aritméticas antes de la elaboración cierta de las nociones porque, sin ellas, las operaciones siguen siendo estáticas.

Harry Grove Wheat analiza dos métodos para la adquisición de la noción de número por el niño: por uno, el niño puede considerar los números como si fueran datos aislados en el sentido de Lay o de Kühnel; por el otro, puede considerarlos como perteneciendo a un sistema de relaciones. En el primer caso la enseñanza de la aritmética no es más que una simple memorización; en el otro la enseñanza de la aritmética exige un espíritu que ponga en relación los distintos números. unos con otros, previendo ya las diversas posibilidades de aplicación. Wheat crítica la manera rígida con que se introducen las primeras nociones númericas, así como también la aplicación concreta a continuación de una introducción abstracta. Es precisamente en esto donde las interpretaciones se prestan a una confusión: el método de la enseñanza gráfica e intuitiva se confunde a veces con los métodos concretos, debido a que los propios programas oficiales confunden los términos. A título de ejemplo veamos un extracto de un texto oficial francés: 'Siempre se deberá utilizar preferentemente números concretos, es decir, números (enteros) seguidos de nombres de objetos (alumnos, boina, etc.) o de una unidad (f, g, m.); la ad-

quisición de la noción de números enteros, concretos, y de su uso supone naturalmente lecciones de cosas diversas, repetidas y sin embargo bastante metódicas" (1). Pero según el vocabulario usual los métodos concretos sólo comienzan con la manipulación de esos objetos mientras que su presentación en forma concreta o por medio de una imagen no provoca, como máximo, más que una intuición. Por lo tanto puede haber en esto un mal entendido. Veamos un ejemplo: los niños que juegan a los dados, ¿han sido iniciados en formar números? El manual "Le calcul vivant" de L. y M. Vassort comienza con un dibujo que muestra a 4 niños, alrededor de una mesa, jugando una partida de dados. Luego se lee:

María tiene: ⚀ ⚀ Pablo tiene: ⚂ ⚀

Pedro tiene: ⚁ ⚀ Luis tiene: ⚀ ⚀

Aquí estamos en presencia de una solución intermedia: las nociones son dadas primero aisladamente por medio de figuras y después son relacionadas. Pero las nociones no han sido elaboradas por medio de la acción, pues esta no ha hecho otra cosa que provocar la aparición de las estructuras perceptivas.

Se podrían citar numerosos manuales que contienen proposiciones análogas. A título de ejemplo mencionaremos uno de los manuales austriacos más Populares: "Eins, zwei, drei, lustig ist die Rechnerci" y un manual ricamente ilustrado de los Estados Unidos: "Numbers we see".

En la primera de estas obras se renuncia a utilizar un esquema gráfico único y se transponen las figuras de Kühnel en forma de globos, arvejas, frutas, niños etc.

En el manual americano las primeras imágenes inician al niño en el pasaje de lo cualitativo a lo cuantitativo (comprobación de mucho y de poco) y en la observación de las correspondencias biunívocas (autos y garajes, platos y ni-

---

(1) Instructions oficielles du 7 décembre 1945 concernant les programmes de calcul du 17 octobre 1945 en France.

ños, etc.). Pero las páginas siguientes presentan, al niño, sin ninguna relación, con representaciones gráficas de formas variadas: muñecas, aviones, etc., siempre de a dos o de a tres, y sólo más tarde y progresivamente de a cuatro cinco, etc. (1).

Toda iniciación matemática en la escuela está basada, pues, en estas obras sobre la observación de imágenes con la tendencia de hacerlas más variadas y reales. Además, cada niño, independientemente de sus camaradas, puede hacer en su manual anotaciones personales. La desventaja de este sistema es la misma que la de los otros manuales: los niños siguen colectiva o sucesivamente los mismos ejercicios, las mismas ilustraciones, etc., sin que haya individualización de esos datos, es decir, adaptación a los diversos gustos y a las diversas aptitudes. Las nuevas tendencias pedagógicas han sabido evitar esas dificultades introduciendo en la escuela, sobre este punto nuevas técnicas.

La individualización de la enseñanza por una parte y por otra el enriquecimiento de las imágenes y por consecuencia de las bases de adquisición han llevado a Carleton Washburne a introducir libretas y fichas de trabajo. De este modo el niño trabaja con un material más variado, más rico y de acuerdo a su gusto personal. Este material didáctico está concebido de tal manera que las operaciones y las nociones se mantienen distintas, como en los precursores de la enseñanza gráfica e intuitiva. Las fichas de Carleton Washburne, por ejemplo, se dividen en 5 series:

1) Estudio de los elementos, por ejemplo de los números 0 a 20.
2) Estudio de las combinaciones de la adición.
3) Estudio de los elementos de la sustracción.
4) Multiplicación.
5) División (2).

Los números (1) están representados en diferentes formas, pues lo esencial es la imagen estática y los núme-

---

(1) Riess Anita, Hartung Maurice L. y Mahoney Catherine: "Numbers we see". Illustrated by Kolb Julia.-Scott, Foreman and Company, Chicago, Atlanta, Dallas, New York. 1948.

(2) Dottrens Robert: "Le progres a l'école: sélection des éleves ou changement des méthodes?". Delachaux et Niestlé, Neuchatel/Paris. 1936.

ros no tienen ninguna relación entre sí. El tema que se va a enseñar está dividido en un cierto número de escalones. Veamos un ejemplo:

LIBRETA N.o 8

Resumen de los 27 escalones sobre el significado de las fracciones

1) La mitad 1|2; el cuarto 1|4; el tercio 1|3; el octavo 1|8, obtenidos dividiendo un entero en 2, 4, 3, 8, partes iguales.

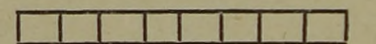
2) **Decir la medida.** — Ejemplo: el entero está dividido en partes iguales.

Cada parte se llama **una mitad.**

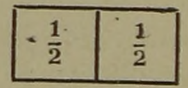


3) El entero está divido en 2, 3. 4, 8 partes iguales.

Sombrea la 1|2, el 1|3, el 1|4, el 1|8.



4) **Crear la fracción.** — Dividir el entero en 2, 3, 4, 8 partes iguales. Ejemplo:



Escribir sobre cada parte su valor respecto al entero.

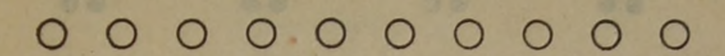
5) **Comparación de las fracciones estudiadas hasta ahora.** — ¿Cuál es la fracción más grande; 1|4 o 1|8?, etc.

6) El entero está constituído por varios objetos.

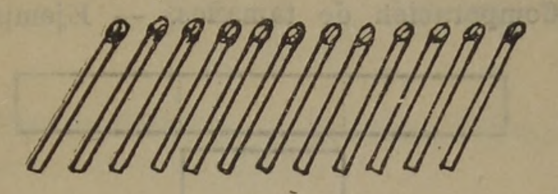
Sombrear la mitad de 2 círculos: ○ ○

el tercio de 3 cuadrados: □ □ □

el décimo de 10 discos:



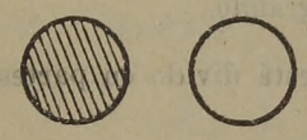
el duodécimo de 12 fósforos:



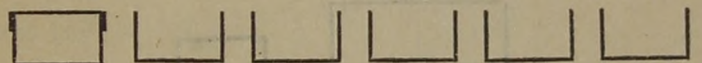
Nota: La fracción simple (1|2, 1|3) está **constituída** por un solo objeto.

7) **Decir la medida.** — Ejemplo:

¿Qué fracción del todo representa el círculo negro?

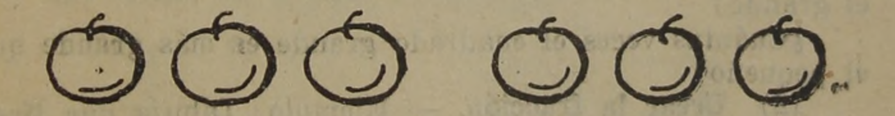


¿Qué fracción de toda la serie representa la caja con tapa?



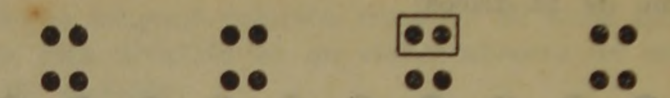
(8) El entero está constituído por varios objetos, pero aquí la fracción simple (1|2, 1|3...) puede comprender varios de ellos formando grupos bien distintos.

Ejemplo: Sombrear la mitad de estas manzanas:



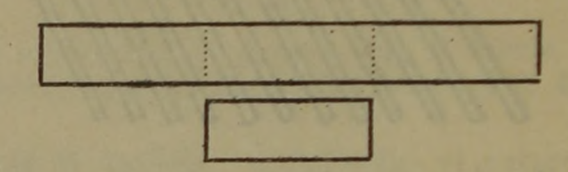
1|2 de 6 manzanas — ...manzanas

9) **Decir la medida.** — Ejemplo:



¿Qué fracción de toda la serie representan los círculos encuadrados?

10) **Comparación de tamaños.** — Ejemplo:

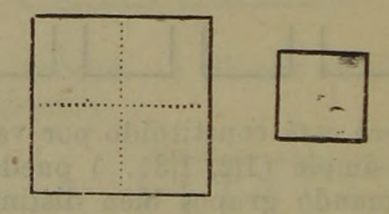


¿Qué fracción del rectángulo grande representa el pequeño?

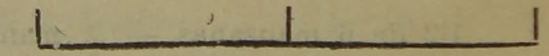
Nota; El rectángulo pequeño entra un número exacto de veces en el grande.

El grande ya está divido en partes igual al rectángulo pequeño.

11) **Comparación de tamaños.** — Ejemplo:

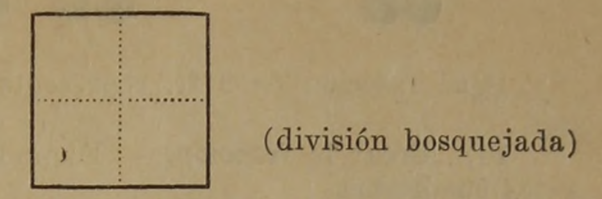


¿Cuántas veces el cuadrado pequeño es más pequeño que el grande?
¿Cuántas veces el cuadrado grande es más grande que el pequeño?
12) **Crear la fracción.** — Ejemplo: Dibuja una línea que sea la mitad de ésta.



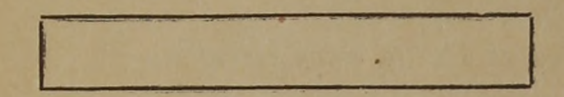
Nota: La línea ya está dividida.

Dibuja un cuadrado que sea el 14 de éste.



(división bosquejada)

13) **Crear la fracción.** — Ejemplo: Dibuja un rectángulo que sea el cuarto de éste.



Nota: Aquí la división no está indicada.

14) **Comparación de tamaños.** — (El entero está constituído por varios objetos).

Ejemplo: Estas son las bolitas de Luis:

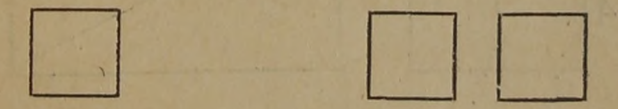


Estas son las de Juan:



¿Cuántas veces Juan tiene más bolitas que Luis?

15) **Decir la medida.** — Ejemplo:



¿Qué fracción de 2 cuadrados representa 1 cuadrado?

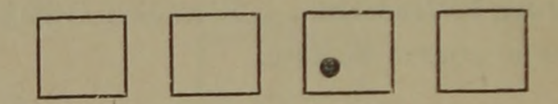


¿Qué fracción de 6 bolitas representan 3 bolitas?

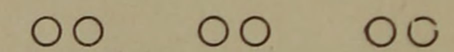
 

¿Qué fracción de 9 fr. representan 3 fr.?

16) **Crear la fracción.** — Ejemplo: Sombrea el 1|4 de estos cuadrados.

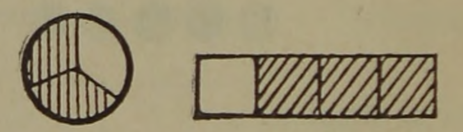


Sombrea el 1|3 de estos círculos:

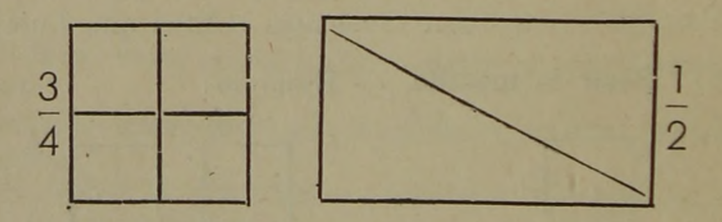


17) **Decir la medida.** — Los 2|3 los 3|4, los 3|8, etc.

Ejemplo: Escribe lo que vale cada fracción sombreada con respecto al entero.



18) **Crear la fracción.** — Ejemplo: Sombrea la fracción indicada:



Nota El entero ya ha sido divido en 2, 3, 4, 8, partes iguales.

19) **Crear la fracción.** — Ejemplo: Sombrea la fracción indicada:

$\frac{4}{8}$ $\frac{2}{3}$

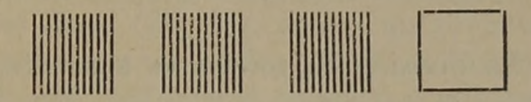
Nota: El alumno debe comenzar por dividir el entero en 2, 3, 4, 8... partes iguales según la fracción que debe sombrear.

20) **Comparación de fracciones.** — Ejemplo **¿Cuál** es la fracción más grande?

1|2 o 2|3?

3|4 o 2|3?

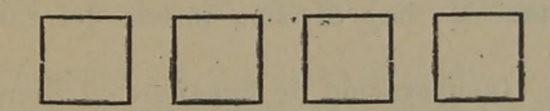
21) **Comparación de la fracción considerada y de la fracción restante.** — Ejemplo:



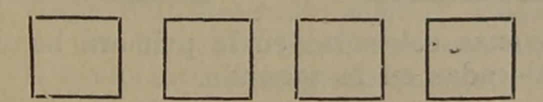
¿Qué fracción de toda la serie representa el cuadrado blanco?

¿Qué fracción de toda la serie representan los cuadrados negros?

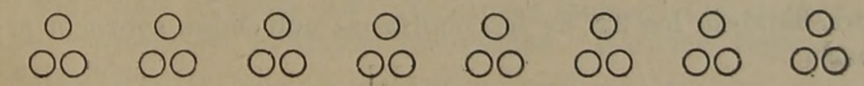
22) **Crear la fracción.** — Ejemplo: Sombrea el **1|4** de **estos cuadrados:**



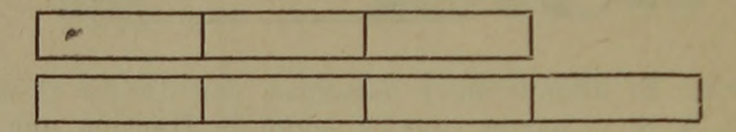
Sombrea los 3|4 de estos cuadrados:



Sombrea los 3|8 de estos círculos

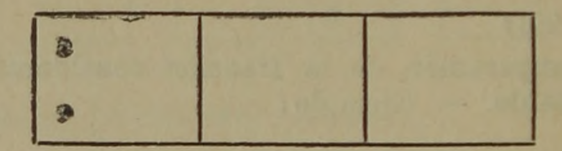


23) **Comparación de tamaños.** — Ejemplo: Compara estos 2 rectángulos.



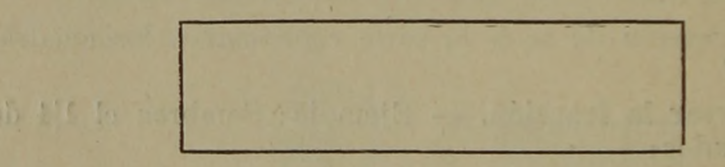
El pequeño vale... del grande.

24) **Crear la fracción.** — Ejemplo: Dibuja un rectángulo que valga los 2|3 de éste.



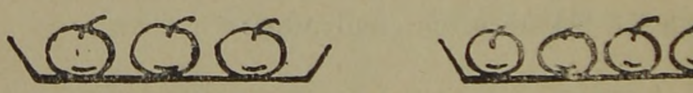
Nota: La división en tercios es aparente.

25) **Crear la fracción.** — Ejemplo: Dibuja un rectángulo que valga los 2|3 de éste.



Nota: No hay división previa del entero en 3 partes iguales.

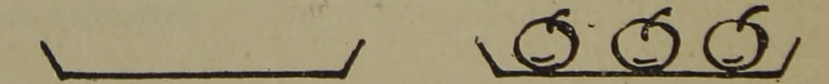
26) **Comparación de tamaños.** — Ejemplo:



Las manzanas colocadas en la primera bandeja son los 3|4 de las colocadas en la segunda.

3 representa los 3|4 de 4.

27) **Crear la fracción.** — Ejemplo: Dibuja sobre la primera bandeja los 2|3 de las manzanas colocadas sobre la segunda.



Mientras se trata, para emitir un simple juicio, de leer simplemente las imágenes, procediendo a comparaciones sucesivas, sobre un material discontínuo o frente a un material contínuo que se presenta, sólo por momentos, el niño es invitado a tomar una iniciativa real para dividir los elementos de tal o cual colección o de tal o cual objeto, anticipando el resultado. Pero el grado de libertad acordado por estas construcciones está limitado a la continuidad del arreglo particular de los datos que, además, no son manipulables. Es por eso que también aquí las representaciones intuitivas parecen hallarse en la base de toda comprensión. Además se ve bien que la noción de fracción no es el resultado de una acción real o interiorizada, ya que la presentación se mantiene rígida e incambiable, ni el de una operación aritmética cualquiera. Por el contrario, la división real de un material no diferenciado y contínuo, que interviene en ciertas fases (25, 27), marca un progreso neto en la dirección de la escuela activa. Pero es difícil comprender cómo el niño, anticipando la solución según un esquema de acción, divide mentalmente sin haber, en realidad, dividido previamente, de tal modo que sea posible la transferencia de las estructuras de las particiones reales a las particiones representadas. La explicación dada es que lo esencial en esta enseñanza no consiste en la manipulación propiamente dicha, como por ejemplo la división de tal o cual forma geométrica, sino en la estructura perceptiva que de ella resulta. Por esto es difícil comprender como éste método puede ser activo, ya que la acción real del niño sólo juega un papel secundario.

Para los pedagogos que defienden un punto de vista genético el significado de las imágenes cambia de una etapa a otra. Si la imagen, como índice de una intuición, juega un papel en la intuición de las soluciones matemáticas, la pedagogía moderna limita la enseñanza gráfica e intuitiva a una cierta etapa del desarrollo mental. Unos se contentan con distinguir las grandes líneas de esas etapas sucesivas (Friedrich Drenckhahn, por ejemplo), otros hacen una lista detallada de los mecanismos a introducir para el aprendizaje de las nociones por medio de las estructuras perceptivas, (Johannes Wittmann, por ejemplo) y otros, por último, sólo utilizan las estructuras perceptivas después de la elaboración concreta preliminar (Maurice Béguin, por ejemplo).

Friedrich Drenckhalm distingue tres etapas para la elaboración de las nociones y de las operaciones matemáticas:

1) Etapa realista o experimental-intuitiva.
2) Etapa intuitiva.
3) Etapa formal-conceptual o lógica deductiva.

La elaboración de la noción de número pertenece al dominio de la primera etapa experimental inductiva. Según Drenckhahn la noción de número es esencialmente cardinal. A la concepción experimental de esta etapa corresponde precisamente el método sensorial. Las nociones elaboradas por una manipulación concreta serán ampliadas inductivamente en el tiempo y en el espacio. Tal es el caso para la mayoría de las fracciones. La geometría se desarrolla análogamente: es concreta y está ligada al gráfico-manipulable (Handlich-Anschaulich). La sistemática sigue los signos de las formas geométricas percibidas.

Lo que aquí nos interesa es la segunda etapa de Drenckhahn que pone en evidencia la intuición. Esta está ligada al dominio de los números racionales por ser, precisamente, números elaborados por las operaciones aritméticas (números algorítmicos) y sin manipulación concreta posible. Aquí es inútil el método experimental inductivo, pues no se puede calcular partiendo de datos tales como:

2|3 por 4|5 igual 8|15 o (—2) (—2) igual + 4.

Drenckhahn precisa que la intuición no tiene en este caso una base concreta y gráfica aún cuando tenga su acción en lo manipulable. Es el vínculo entre el antiguo método inductivo y el nuevo método formal que se prepara.

La tercera etapa no nos interesa, pues no tiene relación con los problemas de la escuela primaria. Pero retengamos esto: la base de la enseñanza matemática en la escuela primaria, según Drenckhahn, es en primer lugar gráfica y en segundo lugar intuitiva, solamente como pasaje a lo formal. Considera así que una intuición matemática debería estar arraigada en las percepciones, lo que es contrario al caracter de la intuición matemática, según nuestras distinciones del parágrafo precedente.

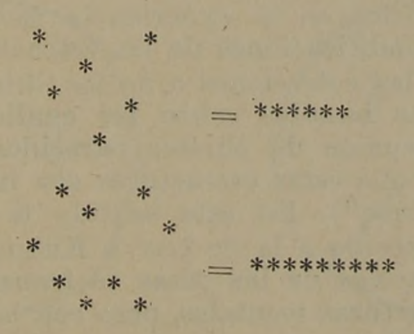
Para Wittmann las nociones y las operaciones son necesariamente interdependientes: los conjuntos no ordenados pueden ser reunidos. Esa reunión dará lugar a la estructura de una colección más importante (potencia); ordenar un conjunto en línea recta es establecer una nueva estructura; hacer corresponder bi-unívocamente y dividir es otra estructura, etc. Wittmann estableció etapas bien distintas para la iniciación de los conjuntos que serán integrados sucesivamente.

La **primera etapa** consiste en ordenar un conjunto cualquiera (colección de objetos) en serie y obtener así las primeras nociones de orden.

La **segunda etapa** extiende esta estructura elemental al ordenamiento de los objetos en series doblados o triplicados por el análisis de la correspondencia bi-unívoca y co-unívoca. Además cada orden rectilíneo debe poder ser dividido en subconjuntos de igual estructura. En fin, el niño debe iniciarse en el conocimiento del orden en una estructura perceptiva constante donde se cambia la posición de los elementos (desplazamientos o rotaciones); a la inversa, teniendo en cuenta la fantasía infantil, se dirigirá al niño para que combine un número de elementos, para reconocer la invariabilidad de la potencia del conjunto, a pesar de la presencia de estructuras perceptivas distintas. Así mismo deberá estudiar los problemas de vecindad y homogeneidad.

Una vez que la noción de equivalencia cuantitativa haya quedado establecida, el niño es capaz de comparar los conjuntos por seriación, analizando la potencia de los conjuntos durante una **tercera etapa.** Así por ejemplo comparará dos conjuntos, las seriaciones y las correspondencias bi-unívocas para establecer conceptos de potencias relativas (nociones de: mucho, poco, más, rico, pobre, amenudo, raramente, breve; nociones de cantidades simplemente extensivas, es decir, comparaciones no numéricas de dos partes; luego: todo, siempre, nunca, etc., como términos de la fijación numérica).

En fin, el niño seriará las potencias de los conjuntos buscando las diferencias de las potencias más pequeñas entre los conjuntos (iteración de la unidad). Los niños en esta etapa sólo trabajarán con conjuntos enumerables, es decir, con conjuntos de un número finito de elementos.



Es durante una **cuarta etapa** que el niño percibirá los conjuntos numéricamente, precisando las diferencias de potencias por los números. Por medio siempre de una acti-

vidad personal, el niño extenderá la noción de equivalencia de conjuntos no estructurados a los conjuntos compuestos (por ejemplo, comprobando por la acción que 10 es igual a 2 por 5, igual a (3 por 3) más (1 por 1), igual, etc.) Si bien el niño no ha trabajado hasta ahora más que con una noción de número cardinal constatando el efectivo correspondiente, ya se ha dado cuenta, por la seriación de esos conjuntos y por su diferencia mínima, que se podría atribuir un orden a todo conjunto dentro de una serie.

En la **quinta etapa** el niño pondrá en evidencia el número cardinal y el número ordinal y comenzará a estudiar los problemas de distributividad. Es también durante esta etapa que se adquieren las primeras nociones de números fraccionarios basándose sobre los mismos conjuntos considerados y no limitándose a un solo objeto.

A partir de la **sexta etapa** la enseñanza se sistematiza según el sistema decimal. Luego la **séptima etapa** será reservada a la introducción de los símbolos, la **octava etapa** al sistema de posición, la **novena etapa** a la aplicación de las cuatro operaciones aritméticas fundamentales, la **décima etapa** al trabajo de las unidades, de las decenas y centenas, la **undécima etapa** a la profundización del sistema numérico en general, estudiando, por ejemplo, la asociatividad y la distributividad y por fin, la **duodécima etapa** iniciará las operaciones con fracciones, de las que hablaremos más adelante.

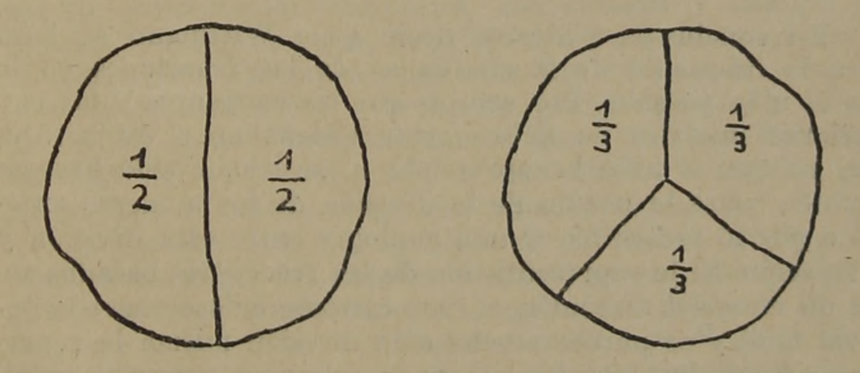
En resumen, ya podemos retener esto: existe, sobre todo en las primeras etapas, un pasaje de lo no estructurado a lo estructurado, de relaciones extensivas a relaciones numéricas, de lo topológico (vecindad, etc.) a lo métrico (estructuras particulares de buena forma en el sentido de la geometría euclidiana). Lo que es esencial en todas las experiencias infantiles es la experiencia física, es decir, el estudio de las modificaciones de las estructuras perceptivas o materiales de las colecciones o de los objetos y no las estructuras lógicas basadas sobre las cualidades solamente (por ejemplo, reunión de objetos parecidos, disociación de objetos, etc., ya que estas estructuras son independientes de toda "buena forma"). En este sentido la metodología de Wittmann es parecida a la de Lay y Kühnel ya que las estructuras perceptivas de las cosas se transformarían directamente en estructuras mentales, pero con la diferencia esencial de que Wittmann propone una mobilidad entre las diferentes imágenes, poniéndolas en equivalencia activa, mientras que Lay y Kühnel se contentan, cada uno, con un solo esquema gráfico.

Wittmann distingue trece etapas en el desarrollo de las nociones de fracciones en el niño, comenzando por la noción de las partes del todo que pasa, entre otras, por las etapas de las nociones de fracciones basadas sobre un material discontínuo, después contínuo, de las equivalencias entre uno o varios enteros y sus partes, las operaciones con las fracciones, etc. Es difícil saber si son etapas genéticas o matemáticas, pero es cierto que el autor ha tratado de hacer una síntesis entre las dos. No podemos citar todas esas etapas pero a título de ejemplo presentamos aquí ejercicios típicos.

Etapa 2. — Se trata de dividir 6 manzanas entre 3 niños. La primera fase consiste en hacer realmente la división, pudiendo el niño representarla así:

o simbólicamente 1|3 (6) igual 2.[2]

Etapa 3. — Se considera la fracción como siendo la parte de un solo objeto y no de una colección (independientemente de su tamaño) es decir, que se realiza el pasaje de un material discontínuo a un material contínuo. Esos objetos pueden ser de cualquier forma: una manzana, un bastón, una circunsferencia, un rectángulo; pero para ciertos objetos interviene el problema de la igualdad de las partes: huevos, coche, etc. En cuanto a las buenas formas geométricas serán divididas sin medidas y únicamente por estimación, como por ejemplo:



Etapa 3b: ¿Cuántas partes están contenidas en un entero? Por ejemplo: ¿Cuántas mitades tienen 3 enteros? (Ver pasaje a una simbolización):

= //////; 3 enteros = $\frac{6}{2}$

Etapa 3c: Inversa de la etapa 3b. ¿Cuántos enteros en tal o cual fracción? (10|2; 6|2; 12|3; etc.).

Etapa 6: Ejercicios como el siguiente: ¿cuántos enteros y cuántas mitades hacen 3 mitades de manzana? Aquí cada parte considerada como un elemento con el cual se opera y la representación sería la siguiente:

$3\left(\frac{1}{2}\right) = \ldots + \ldots + \ldots = \ldots = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Etapa 8c: (Después de 8a del tipo 1|2: 2 y 8b del tipo 3|4: 2).

Ejercicio del tipo 1|2 de la mitad, presentado así:

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ldots = \ldots = \frac{1}{2}$ del todo

Etapa 13c: Una fracción está dividida en fracciones aún más pequeñas, o lo que es lo mismo, la fracción está medida por fracciones más pequeñas:

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{3}{6} : \left[\frac{2}{6}\right] = 3 : [2] = \text{III} : (\text{II}) = \ldots = 1\frac{1}{2}$ veces.

En conclusión podemos decir que: Wittmann se basa para la iniciación de la enseñanza de las fracciones en lo que el niño ya sabe. Por esto es que los conjuntos y las colecciones iniciales no deben estar ordenadas o estructuradas, ya que el niño ha aprendido a hacerlo. Puede basarse también sobre la noción de la división de los números enteros o por lo menos hacer una analogía entre esta división y la fracción. Si la representación de las fracciones basadas sobre un material discontínuo (por ejemplo colecciones) es todavía fácil y se parece mucho a la división misma la representación de las fracciones basada sobre un material contínuo se complica sensiblemente, por lo menos en lo que concierne a las operaciones que se aplican a las fracciones. Pero Wittmann insiste sobre las representaciones intuitivas que fa-

cilitan la comprensión y que, según él, son el único medio de dispensar una enseñanza inteligente.

Sin embargo, introduce un nuevo factor muy importante que designa con el nombre de fantasía infantil que, para él, significa una concepción global de naturaleza creativa y sintética que provoca el aislamiento por la percepción de ciertas figuras. El niño, en su desarrollo, pasaría por tres etapas: la primera, hasta los 8 o 9 años, se caracteriza por el apego a la realidad, por una parte y por otra a sus necesidades espontáneas de fantasía; la segunda etapa permite al niño distinguir su yo en relación a su medio, esto en función del grado de su maduración; la tercera etapa, en fin, refuerza aún más esas discriminaciones, sobre todo en lo que concierne a la objetividad material y mental y a la subjetividad síquica, equilibrándolas. La enseñanza debe tener en cuenta y adaptarse a estas etapas. A la primera etapa corresponden los juegos, en particular los que tienen reglas, que preparan para la vida social; a la segunda etapa corresponden las diferentes formas de trabajo por equipos, tales como las conversaciones libres; en fin, a la tercera etapa corresponde un trabajo de extensión: los estudios sociales, el estudio de la estructura de la sociedad y del estado por medio del arte dramático, por ejemplo, lo que permite al niño coordinar los grupos entre sí como lo hacía antes con el grupo mismo. Por lo tanto, el niño debe aprender a disociar el dominio material del dominio mental y del dominio síquico y reconocer que el dominio material está determinado por las calidades dadas en el espacio y en el tiempo, con relaciones cuantitativas características.

Según Wittmann las representaciones intuitivas son esencialmente activas: es el estudio en el tiempo de procesos de construcción complejos, con síntesis y análisis que ayudan a comprender la arquitectura de aquello que ha sido percibido. Las representaciones intuitivas son, pues, elementos constitutivos —tomados globalmente— y la conciencia de estas coordinaciones en una totalidad. Por eso el carácter de las percepciones es más dinámico y exige comparaciones de estructuras temporales y espaciales.

Lo mismo que Lay y Kühnel, Wittmann distingue el número cardinal del número ordinal, precisando que el segundo aparece genéticamente después del primero. El niño reconoce primero las cualidades y solamente después las relaciones cuantitativas como las primeras expresiones del número cardinal.

Todo número simboliza pues, al principio, una colección de objetos distintos, que forman una unidad o una to-

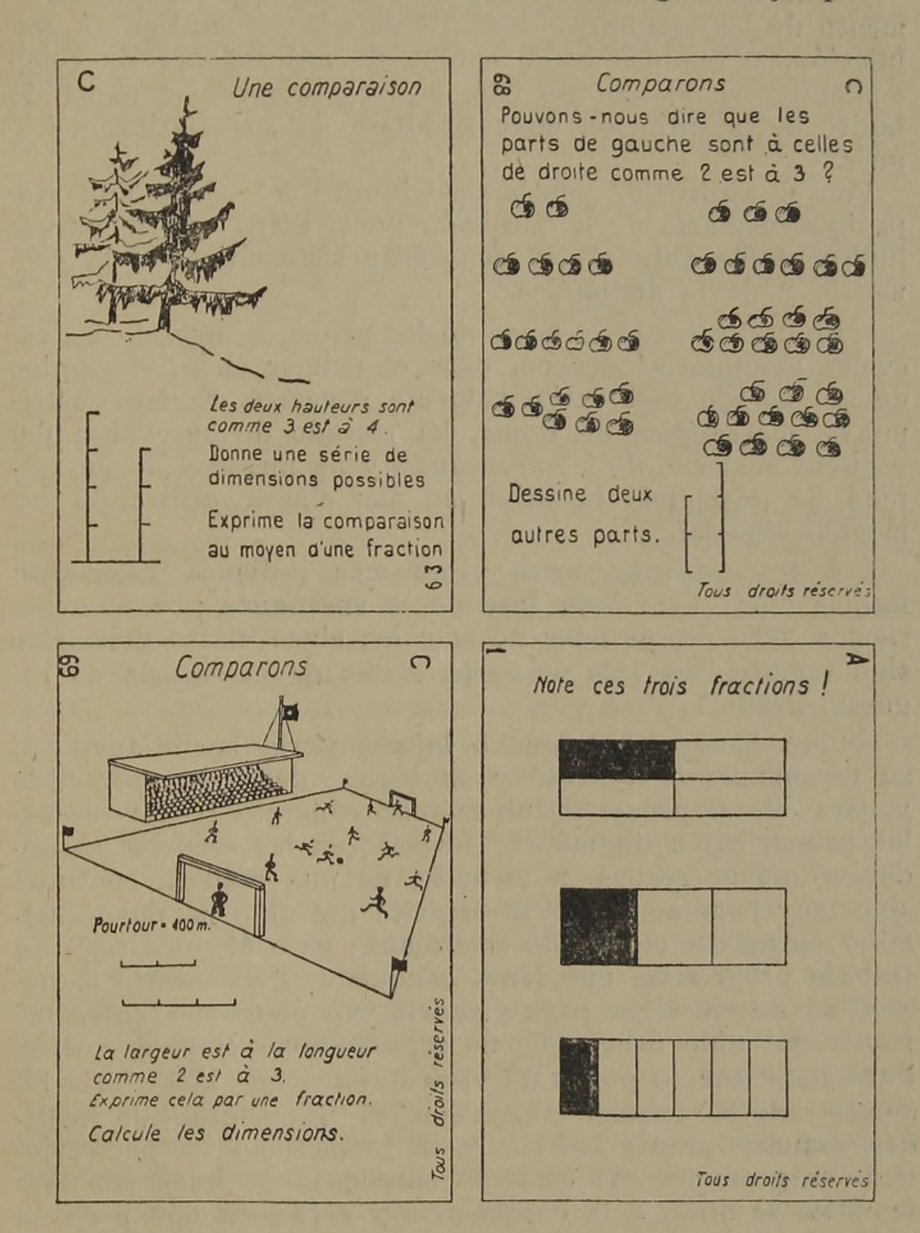
talidad, la que posee entera libertad en cuanto a la calidad de sus diferentes miembros. No hay, por lo tanto, colecciones homogéneas, es decir, colecciones de objetos equivalentes, pero sin embargo el estudio se realiza únicamente sobre la potencia de los conjuntos. Esta está controlada por correspondencias bi-unívocas. La diferencia de las potencias de los conjuntos que el niño controla, mediante las asociaciones, ha demostrado que la noción del número cardinal 1 es particularmente difícil de adquirir pues sólo se puede comprender si se acepta que la unidad, siendo singular, forma parte de la pluralidad. La noción de los números ordinales se forma sobre la base de la noción de los números cardinales, buscando siempre la más pequeña diferencia entre dos números cardinales y colocando a estos en serie de orden creciente o decreciente.

Pero como las representaciones intuitivas son esencialmente activas para Wittmann, al contrario de Lay y de Kühnel, no basta con presentarle al niño imágenes. Las nociones no son simples transformaciones o una interiorización de representaciones gráficas, porque las nociones no pueden ser representadas por imágenes únicas, ya que estas son la consecuencia de construcciones personales y no solamente de percepciones. Así se puede llegar a la conclusión según Lay y Kühnel, que los esquemas gráficos permitirían un lazo entre las características de la imagen y los números cardinales, mientras que Wittmann nos propone construcciones, percepciones y dibujos.

La estructura es sinónimo de encadenamiento. Un análisis de la estructura exige una observación activa, es decir, una manipulación concreta o por lo menos una producción personal cualquiera (por el dibujo, por el lenguaje o por el juego). El niño debe aprender a establecer una correspondencia directa entre la estructura establecida y su significado, para luego buscar las estructuras idénticas.

La enseñanza gráfica e intuitiva cambia completamente de carácter, desde que ya no se utilizan las representaciones intuitivas como medios directos de elaboración de nociones, sino como un pasaje a la simbolización de las actividades preliminares (de las que hablaremos más adelante). La mayoría de los manuales empleados en las clases donde se ha comenzado a utilizar procedimientos más sistemáticos, abstractos y simbólicos, contienen ilustraciones poco numerosas por razones de orden práctico, pero introducidas con el fin de ampliar los conocimientos y las aplicaciones posibles de las nociones elementales. Inspirándose en el sistema de las fichas aritméticas de Carleton Washburne, Mau-

rice Béguin compuso una rica colección de fichas que sirven para profundizar la noción de fracción y de las operaciones con fracciones de las que damos algunos ejemplos:



La ventaja de ese método está en permitir también la verificación de los conocimientos de los alumnos con ayuda de controles individuales. Por una parte el niño proyecta sus conocimientos en las imágenes y por otra, la imagen puede dar lugar a anticipaciones de soluciones sobre datos

no encontrados antes en realidad pero análogos a elaboraciones concretas ya encontradas.

Maurice Béguin introduce las imágenes como complemento de las manipulaciones preliminares y medios de ampliación, y también como campo de aplicaciones de conocimientos, en el que las imágenes representan el papel de índice de la intuición cuyo resultado es sistematizado después.

Por el contrario, Emma Castelnuovo introduce una etapa intermediaria de la intuición pura, etapa que le parece indispensable antes de la enseñanza sistemática de la geometría y de la aritmética.

En Italia los programas de los primeros años de las escuelas secundarias preven, para el primer ciclo, el empleo de un método casi exclusivamente concreto. Emma Castelnuovo, matemática de Roma, ha tratado de hacer uso del espíritu moderno de los programas y ha introducido un método de geometría intuitiva en sus clases, utilizando un manual especial.

A propósito de estos programas italianos Lombardo Radice dice (1): "Esta fase de la enseñanza por la experiencia debe comprender no sólo las cinco clases primarias sino también las tres primeras clases de la escuela de segundo grado".

Para Emma Castelnuovo la geometría euclidiana, con su razonamiento riguroso y su lógica, debe ser aprendida y para ella el pasaje de un método concreto (en las escuelas primarias) a un método formal (en las escuelas secundarias) no se realiza, a menudo, de una manera contínua sino muy bruscamente. ''El espíritu del niño no puede asimilar en un día el método euclidiano; para él constituye un trabajo progresivo, una lenta conquista. Debe sentir la necesidad de ese rigor para gustarlo. No pongamos entre las manos del niño útiles que no sepa todavía emplear", dice. Para justificar su punto de vista destaca que la historia ha demostrado las mismas etapas con los ''Elementos" de Euclides, etapas durante las cuales la humanidad ha perfeccionado la geometría. Durante la enseñanza de iniciación matemática se apela a la experiencia y a la intuición pero no a las demostraciones racionales.

---

(1) Lombardo Radice, Lucio: "L'abstraction est une conquête". Cahiers pedagogiques pour l'enseignement du Second Degré. V/950.

Emma Castelnuovo piensa que es absurdo comenzar por definiciones, que por otra parte el niño nunca comprenderá, aún cuando el maestro le dé luego una ilustración.

Si se enseña una geometría intuitiva se correrá el riesgo de que los sucesivos capítulos no tengan ningún vínculo entre sí, ya que le faltan al alumno los lazos racionales y no conoce el porqué de una determinada serie elegida para la enseñanza de la geometría. Emma Castelnuovo propone sustituir el método descripto tradicional por un método constructivo en relación con el desarrollo histórico de la geometría y se atiene mucho a las ideas de Alexis-Claude Clairaut. El orden de su manual es casi el inverso del seguido por la mayoría, ya que comienza por problemas de orden práctico: equivalencias, igualdades, similitudes. "Se pasa de lo complejo (polígono) a lo simple (segmento, ángulo), de lo particular a lo general, de los problemas prácticos a los problemas teóricos tratando de acercarse poco a poco al razonamiento racional". (1).

Emma Castelnuovo, evitando toda definición, comienza sus lecciones por dibujos geométricos a fin de habituar al niño a la precisión y le señala, por medio de reproducciones de obra de arte de las civilizaciones antiguas y modernas, la presencia de la geometría en la vida corriente. Luego serán los problemas de equivalencia, (área de un polígono). La regla para calcular el área de un rectángulo, de un triángulo, de un paralelogramo, etc., es buscada después Al tomar los mismos problemas pero con obstáculos en las medidas en línea recta, dentro del área considerada, el niño es llevado a resolver los problemas de igualdad (idea de ángulo). Pero a menudo el terreno llano, indispensable para la construcción de una superficie igual, no se encuentra y por lo tanto la idea de similitud es implicada.

La enseñanza de Emma Catelnuovo se acerca, en cierto sentido, a la de Decroly, de la que hablaremos más adelante. En ambas escuelas no se parte de definiciones sino de problemas concretos. Es cierto que para Emma Castelnuovo esos problemas sólo existen, en gran parte, por representaciones, pero no hay que olvidar que sus alumnos tienen más edad que los de Decroly. Por otra parte, ella se aleja mucho de los métodos gráficos e intuitivos propiamente dichos. Sostiene también que sólo la intuición matemática (exigiendo por sí misma una racionalización y una verifi-

---

(1) Castelnuovo, Emma: "Geometrie intuitiva per le scuole medie inferiori". R. Carabba, Lanciano (Chietti).

cación) es la que juega un papel y no las estructuras perceptivas, mientras que en la mayoría de los manuales usados actualmente, como los que hemos descripto, las estructuras perceptivas y la intuición tienen una importancia igual.

La enseñanza intuitiva de la iniciación matemática se ha desarrollado considerablemente en estos últimos años, aún cuando la intuición cambia, amenudo, de significado según los autores.

Jean-Louis Nicolet, en su estudio sobre la intuición matemática y los dibujos animados, escribe que "el vocablo intuición matemática no abarca un campo bien limitado de la realidad síquica, sino que designa una región cuyo contorno se desvanece y se confunde con otras manifestaciones de la intuición humana". "La intuición persuade pero no demuestra, la lógica demuestra pero no persuade, no se llega a la certidumbre sino después de haber "comprendido" un razonamiento riguroso, cuando se lo aplica a uno o dos ejemplos. Por lo tanto, hay que terminar por la intuición si no se ha querido comenzar por ella".

Por eso para Nicolet lógica e intuición son dos factores complementarios para alcanzar el nivel de la comprensión. Esa es la razón por la cual Nicolet trabaja con dibujos animados no comentados: el niño, al principio, sólo ve figuras movientes y vivas y sobre lo que él ha podido observar es que construye su demostración, que se hace sentir como una necesidad. Y como para Nicolet inteligencia e intuición son siempre complementarias "hay que llegar al espíritu lógico, pero esto sólo es posible partiendo de la intuición. Si en un alumno la intuición no se despierta al comienzo de la vida intelectual, se atrofia y ya no es apta para cumplir su papel" (1).

Los dibujos animados o los films mudos han sido introducidos en distintos niveles. Las primeras reacciones ya se han manifestado: es así que Vera M. Falconer escribe "Es posible introducir ayudas visuales en algunos cursos de matemáticas pero los resultados, en lo que se refiere a la comprensión de los alumnos, apenas se justifican". (2)

---

(1) Nicolet, J. L.: "Intuition mathématique et dessins animés. Poyot, Lausanne, 1942.

(2) Falconer, Vera M.: **"Filmstrips a descriptive index and users guide"**. Mc Graw — Hill Book Co. Inc. New York 1948.

Se ha destacado que la mayoría de los films didácticos han sido producidos para las escuelas secundarias. Sin embargo, actualmente se comienzan a utilizar films para la enseñanza de la aritmética elemental. Brownell presenta una larga lista de temas que pueden proporcionar material para un film y susceptibles de ser utilizados en aritmética. Nicolet propuso films mudos, los que provocarían una intuición tan pura como fuese posible. Por el contrario Irene Sauble piensa que los films sonoros, realizados conforme a las teorías de la comprensión (por oposición a las teorías del simple "drill") en la enseñanza de la aritmética, podrían contribuir enormemente por las siguientes razones:

1) Un film puede hacer que una serie de actividades sean tan vivas que el alumno sienta que participa en ellas.

2) Se puede organizar los films o la serie de films de tal manera que el niño comprenda bien el pasaje de lo concreto a lo abstracto.

3) Un film puede estimular al niño para que intente por sí mismo la experiencia que ha visto.

4) A la inversa, la utilización de films en la escuela puede sugerir al maestro nuevas técnicas y nuevos materiales para aplicar en clase.

5) En fin, un film puede permitir una comprensión más profunda del maestro. (1)

Estas técnicas se oponen a la de Nicolet porque hacen actuar dos sentidos. Mientras que Nicolet sólo se apoya sobre la percepción visual, los films propuestos por Irene Sauble acompañan las percepciones visuales con comentarios hablados, de tal modo que la intuición matemática queda muy reducida. Su función es muy distinta: Nicolet quiere que sus films despierten una intuición que apele a la verificación por un esfuerzo personal; Irene Sauble quiere estimular al niño a imitar o aún a comprender directamente. Este punto de vista aporta poca novedad: reemplaza simplemente el pizarrón y el maestro por una técnica moderna, quizás más estimulante, pero que no cambia mucho las tradiciones clásicas de la enseñanza.

Si Wittmann estableció las bases de una enseñanza por medio de las representaciones intiutivas múltiples y equivalentes, si Emma Castelnuovo y Nicolet crearon una enseñan-

---

(1) Film and Education. Edited by Godfrey Elliott. Chapter VIII: Irene Sauble: "Application of the film in Mathematics", Philosophical Library, New York, 1948.

za intuitiva pura y simple, todos aquellos que tienen en cuenta la teoría de la Forma han sistematizado la utilización de la estructuración perceptiva y de la intuición que de ella resulta.

La estructuración perceptiva corresponde a una organización de un campo perceptivo que une las artes al todo. Luego, para los "Gestaltistas", hay isomorfismo entre las estructuras perceptivas o físicas y las estructuras síquicas. La intuición, en la sicología de la Forma, corresponde a un conocimiento directo gracias a la organización interna de una percepción o de una representación. La teoría de la Forma da a las operaciones mentales un carácter más activo por las tendencias a agrupar, a centrar, a reorganizar, carácter que es adecuado a una estructura de la situación dada, y esas operaciones del pensamiento muestran, en general, una regularidad en su desarrollo.

Catherine Stern ha tratado de crear un lazo entre las ideas "gestaltistas" y las tendencias modernas de la enseñanza de que ya hemos hablado, es decir, haciendo que los niños sean capaces de descubrir por sí mismos o inmediatamente las dificultades que se presentan. "En lugar de desarrollar las primeras nociones numéricas por la numeración de elementos en grupos de objetos no estructurados, el niño trabaja con estructuras simples que le muestran, desde el comienzo, las relaciones entre los números de nuestro sistema numérico" (1). Hay que ajustar la enseñanza de la aritmética a las capacidades sicológicas que describe la sicología, dándoles un papel que les convenga.

Cuando se le presentan al niño varios lápices, él no puede deducir de ellos las relaciones numéricas, ya que ellas no existen. Puede contar tres o cuatro lápices y encontrar la suma de los dos montones, pero la imagen sola no da ninguna indicación sobre el concepto "siete" de tres y cuatro. Los esquemas gráficos —aún en su forma más concreta —son una especie de símbolos para los números pequeños pero no pueden realizar la creación de la aritmética; esa es la razón por la cual no son útiles para alcanzar los fines que persigue la enseñanza de la aritmética.

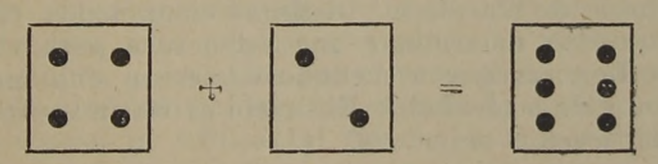
¿Por qué hay que rechazar el método de numeración? Al contar de 1 a 10, al hacer una correspondencia biunívoca de los objetos con los símbolos, en forma sucesiva, no

(1) Stern. Catherine: "Children discover Arithmetic". An Introduction to structural Arithmetic. Harper x Bros. New Pork. 1949.

es posible retroceder para buscar donde se encontraba el 5 ya que no se lo había marcado. Se conoce el orden de sucesión, que 5, por ejemplo, está después del 4, pero no es posible darse cuenta de las diferencias de tamaño entre cada colección. Al seriar 5 puntos. no es posible hacer una comparación visual inmediata entre 4 puntos y 5 puntos. Al presentar, como en la mayoría de los manuales de aritmética que emplean la enseñanza gráfica e intuitiva, 6 manzanas y luego 4 manzanas en imágenes no estructuradas en "buena forma", sólo se tendrá, cuando se las cuente, 10 manzanas, ya que el resultado 10 no aparece en imagen. Por el contrario, Catherine Stern propone, que se sustiuyan las representaciones gráficas por bloques de distinta longitud pero siempre múltiples de una unidad cúbica. Se podría, entonces y de inmediato, deducir de un bloque más grandede, un número más grande y además, se podría constatar que dos bloques que tuvieran una longitud de 5 cada uno, corresponderían juntos a un bloque de 10, En este caso el niño no contará sino que medirá.

Todo esto no es nuevo; basta recordar que María Montessori ha propuesto un material muy semejante. Pero Catherine Stern insiste en las medidas mientras que Montessori deja que los niños cuenten. Las medidas consisten en equivalencias: 4 más 6 igual 2 más 8, etc. Thorndike exige que el niño conozca el significado serial (noción de ordenación) y el significado de una colección (1); el material de Stern ofrece las dos elaboraciones: el nombre "tres" pertenece a un bloque corto en los bloques seriados, etc. Asimismo atribuye a cada bloque un color para que los niños reconozcan mejor los bloques. "Los sicólogos son los únicos que se han intrigado con los colores, pero los niños jamás".

Stern no utiliza las estructuras de los dominós, pues ellas no se construyen regularmente de un número a otro agregando a la antigua estructura un nuevo elemento. Las estructuras son independientes; veamos un ejemplo:



En cambio Stern propone otro material: cubos colocados dentro de un encuadramiento de tal modo que una es-

(1) Thorndike, E. L.: "The psychology of Arithmetic". MacMillan, New York. 1926.

tructura dependa inmediatamente de la precedente, por ejemplo:



"Las estructuras de estos modelos son inolvidables, ya que de esta manera el niño puede ver, en su espíritu, los subgrupos si alguna vez reconstruye la imagen de 8 o de 9 etc".

El material de Stern es de tal naturaleza que se lo utiliza ventajosamente en los jardines de infantes. Por lo tanto la iniciación matemática comienza mucho antes de la escolaridad obligatoria, mediante un material de cálculo. Sin embargo, lo mismo que para el material de Montessori la función del material de Stern no es la de ser manipulado, sino la de proporcionar estructuras de percepción, consistiendo la actividad del niño en comparar esas estructuras con medidas. Pero como lo dice la misma Stern esas estructuras, siempre que representen formas simples, se fijarán en el espíritu del niño, lo que corresponde exactamente a las teorías sensoriales empíricas de Lay, tanto más cuanto que Stern trabaja con sus niños sobre una estructura perceptiva única. Por eso se puede llegar a la conclusión de que la teoría de la Forma puede provocar una enseñanza rígida y poco dinámica. Al servirse de una enseñanza gráfica habría que tener la seguridad de que no existe ambigüedad. Sin embargo Wertheimer admite, como sicólogo "gestaltista", que: "Algunas veces la situación es estructuralmente ambigua, como sucede en la percepción de las figuras donde las líneas limitativas pueden pertenecer a uno u otro dominio de tal modo que pueden existir varias posibilidades de estructuración. Sus causas pueden ser la falta de datos y de claridad. "Distintas condiciones, fuerzas y factores pueden determinar una estructura para el sujeto, pues hay factores que a menudo encierran una inercia de de hábitos y de actividades. El sujeto es víctima entonces de una simplificación seductora". (1)

Wertheimer, Max.: "Productive Thinking", Harper & Brothers, New York, 1945.

III. — La Enseñanza por la acción

1. — *Las concepciones antiguas*

Si bien la enseñanza gráfica e intuitiva ha trastornado la enseñanza escolástica tradicional desde hace medio siglo, esa misma enseñanza ha cambiado de aspecto: la metodología de Montessori es un ejemplo de esa evolución. A los factores de una sicología sensualista empirista se agregan ciertos elementos más activos y la interpretación del pensamiento se hace, progresivamente, en función de una acción concreta. En fin, la acción del niño predomina en la enseñanza de la iniciación matemática.

Para liberar la enseñanza de toda metodología libresca, para que el niño sea más activo y para tener en cuenta las individualidades en una clase, los primeros reformadores de la enseñanza preescolar y primaria introdujeron un material didáctico concreto y manipulable, reivindicando una mayor libertad para los niños. Esas primeras manipulaciones tuvieron como fin crear un lazo entre la actividad manual y la actividad mental. La libertad en clase ha permitido desarrollar las actividades espontáneas de los niños. El "learning by doing", para hablar con John Dewey, se ha convertido en uno de los fundamentos de lo que hoy se llama **escuela activa.** Se ha reconocido que el niño sólo comprende nociones y operaciones por medio de la asimilación personal y no por una enseñanza desde el exterior.

Se ha establecido una oposición entre el método del "drill" del cual hemos hablado en el primer capítulo y el método activo; se ha pretendido que la escuela activa hace perder mucho tiempo a los niños, mientras que el método del "drill" permite, aún cuando no sea sicológico, un desarrollo rápido de los conocimientos matemáticos del niño.

Existe, a propósito de esto, una especie de analogía entre las preocupaciones metodológicas y las de la industria moderna. Esta exige un rendimiento mejor. "Time is money" no sólo se aplica a los adultos que ganan su vida, sino que también se aplica a los niños cuyos programas escolares aumentan cada día. Indudablemente el método escolástico y el método heurístico no utilizan el tiempo en la misma forma: el esfuerzo del descubrimiento consume, en general, mucho más tiempo pero permite ganarlo más tarde. Tal es el resultado de las investigaciones realizadas en Estados Unidos donde la discusión entre los que proponen una teoría de automatización ("drill") en la escuela y los que proponen una teoría de comprensión ("meaning") continúa todavía.

Según la teoría de la adquisición de automatismos (1) los niños aprenden los hechos matemáticos por simple repetición hasta alcanzar la asimilación completa. Pero también el maestro puede dar una brevísima introducción para que el niño comprenda lo que luego debe aprender o si esto no es posible, es decir, cuando se trata de un tema más difícil de comprender, se hace aprender sin explicaciones, reservándolas para más tarde, perdiendo de este modo menos tiempo al empezar. Esta teoría está menos extendida en las escuelas que en las proposiciones didácticas de los manuales, en particular de aritmética.

Como ya lo dijimos en el primer capítulo, se puede objetar a esta teoría que la falta de comprensión preliminar y el automatismo prematuro incitan al niño a cometer errores contínuos, difíciles de evitar más tarde.

En este capítulo vamos a mostrar cuales fueron los primeros métodos de escuela activa. El iniciador de este movimiento es incuestionablemente John Dewey, pues fue el primero en apelar a las fuerzas creadoras de los niños. Sus reflexiones sobre la pedagogía han dado nacimiento a una nueva concepción de la didáctica escolar y a ciertos procesos mentales que se hallan en la base del razonamiento infantil. Otro de los grandes realizadores de la escuela fue Ovidio Decroly, sicólogo y pedagogo, quien por esa razón tuvo una visión muy amplia de los problemas escolares. En fin, una corriente importante partidiaria de un material artificial que favorezca la actividad mental, apareció desde los comienzos de la escuela activa. Las señoritas Audemars y Lafendel, fundadoras y directoras de la Casa de los Pequeños en Ginebra, perfeccionaron esas ideas y por eso creemos conveniente examinarlas aquí.

Los automatismos sólo se adquieren en función de conocimientos previos. Pero estos no pueden aprenderse sólo desde el exterior: deben elaborarse individualmente en cada alumno. Para nosotros ha sido una revelación poder comprobar que John Dewey, mucho antes de sus publicaciones más conocidas y mucho antes de las primeras realizaciones de la escuela activa contribuyó, en colaboración con James McLellan, a reformar sobre esa base la enseñanza del cálculo.

Para estos dos autores el número es un proceso racional y no un objeto sensible. El simple hecho de encontrar-

---

(1) Brownell, William A.: Psichological considerations in the learning and the teaching of Arithmetic.

se en presencia, ya sea por los ojos o por los oídos, con un conjunto de objetos, no significa que se adquiera un conocimiento consciente de los números. (1)

John Dewey no pretende que ciertos procesos tales como la abstración numérica y las generalizaciones sean los únicos a tener en cuenta en la génesis del número. Por el contrario, es imposible descartar la limitación del tiempo y de la materia de que se dispone, la economía de la energía en la vida cotidiana, los medios y los fines de nuestras actividades, que exigen valuaciones, las que necesitan la intervención de números, de medidas y de cantidades. Los medios son dados por la intención, por el fin de que se desea alcanzar, lo que provoca abstracciones y generalizaciones. Si encontrándonos frente a una vitrina deseamos avaluar la cantidad total de las telas expuestas, hacemos abstracción de la calidad de las distintas telas, ya que ella no entra para nada en el problema. Si por el contrario, se desea estimar el valor de esas mismas telas se puede haber abstracción de todos los factores que, probablemente, no representarán ningún papel en esa estimación, tales como los colores, los dibujos, etc. Pero siempre es el fin el que implica una elección y esto provoca a la vez una selección y una abstracción. Por las mismas razones es necesario generalizar. Todas las telas no son idénticas; sin embargo, forman un todo por lo que les es común, es decir, el ser telas. Los objetos considerados están unidos por una sola relación, aún cuando se presenten muy distintamente a los ojos o a los oídos. Por lo tanto es también ese fin el que provoca esa clasificación en un todo. Todos esos ajustes de los medios al fin necesitan medidas en las que el número tiene su génesis.

Para Dewey la numeración y la medida están estrechamente unidas. Pero la costumbre, especialmente en la enseñanza, quiere que, equivocadamente, hagamos una distinción entre la numeración y la medida. Generalmente se dice que contamos los objetos para saber, como se dice en inglés "how many" (cuántos) objetos tenemos, mientras que medimos un objeto particular para saber, siempre según la óptica inglesa, "how much" (cuánto) de esto tenemos a nuestra disposición, etc. Medimos distancias, pesos, volúmenes, etc.

Por lo tanto, de acuerdo con Dewey, se podría distinguir cantidades con una idea de multiplicidad ("how many")

---

(1) McLellan, James y Dewey, John: "The psychology of number and its application to methods of teaching arithmetic". D. Appleton & Company, New York, 1895.

y cantidades con una idea de importancia ("how much"). Pero si para muchos pedagogos esas dos cantidades son en general muy distintas, para Dewey están estrechamente unidas: si contamos los libros de una biblioteca medimos su tamaño: si contamos los días de un año, medimos la duración del año, etc.; en suma, cuando contamos, medimos y es por esto que las mediciones forman la base de la enseñanza de la aritmética.

Por otra parte, al medir una cantidad continua, una "cantidad más o menos importante", la enumeración se hace indispensable. Dicho de otro modo: no hay ninguna medida sin enumeración de las partes (o unidades elegidas) o sea que cuando medimos, contamos. La diferencia se encuentra en lo referente a la unidad de las medidas, que no se ha definido De donde resultan efectos desfavorables para la iniciación del estudio de las fracciones: la mitad de una manzana, por ejemplo, no es todvaía una expresión matemática ya que no da ninguna indicación sobre el todo, su peso, su volumen, etc. La mitad sólo existe en relación con el todo.

En conclusión, se pueden resumir las ideas de Dewey sobre la enseñanza de la aritmética de la siguiente manera: rechaza el método, gráfico e intuitivo, global o analítico, y opone a las tendencias de una enseñanza con representaciones intuitivas, una enseñanza con elaboraciones activas. Como lo hemos comprobado el método intuitivo descuida el análisis del grupo de objetos que se presenta a los niños, pero este análisis es indispensable para la percepción del número, según Dewey. El método analítico intuitivo introduciría el análisis de grupo en una época en que el niño sólo posee aptitudes para las percepciones globales y confusas, lo que puede provocar el funcionamiento normal de la discriminación de las partes, de un todo Según Dewey no se puede imprimir en el espíritu del niño los diferentes números proporcionándole las imágenes de configuraciones simples y es por esto que sustituye los métodos estáticos por un método activo que inculca el número por una actividad propia del niño. El número debe ser vivido antes de que se le conciba y como lo hemos visto la actividad le debe hacer sentir que el número es un medio práctico para alcanzar ciertos fines. Esa actividad consiste en medir, de determinada manera, por ejemplo, que el número 4 no sea un dato aislado y rígido sino que sea elaborado por una actividad adaptada a los fines de alcanzar un propósito práctico: por ejemplo, la enumeración de cuatro objetos (medida) y por esto mismo la actividad real se transforma en actividad mental, de donde surge la noción de número.

Las características de la enseñanza decroliana son, esencialmente, las siguientes: La enseñanza está modelada sobre el desarrollo del niño; se basa sobre la percepción inicial de conjuntos globales y luego sobre análisis de complejidad creciente. Las dos tendencias implican un material natural

El principio de la enseñanza de las cantidades reposa sobre mediciones y comparaciones: el niño puede sugerir el realizar la medición del ancho y el largo de una habitación, se interesa por el peso de un objeto, querría comparar los tiempos de reacción de los niños en una competencia. Esas mediciones están dictadas por el interés de los niños mismos. Las unidades son al principio espontáneas: la longitud de un zapato, de la mano, del paso de un niño, el número de nueces o de castañas para el peso, etc. Las colecciones de objetos parecidos no son necesariamente contadas: basta mantener constante una colección para compararla con otras por medio de correspondencias biunívocas. o bien basta comprobar el aumento o la disminución de una colocación de pesos naturales, desde que se trata de comparar dos objetos o desde que se trata de comprobar la variabilidad de un objeto dado (crecimiento de un ser vivo) etc.

El material de las escuelas decrolianas es siempre natural, tal como el niño lo encuentra en la realidad, siempre que permita establecer colecciones El análisis de estas lleva a las primeras abstracciones (eliminación de uno o de varios factores característicos o discriminación de uno solo de los factores haciendo abstracción de los otros), a las clasificaciones y a las definiciones (por ejemplo, por los factores comunes en juego). Pero siempre los fenómenos preceden a los pensamientos y el material es indispensable. Por lo tanto, el maestro debe presentarlo en el momento oportuno, es decir, en función de la evolución del interés infantil.

La medición del largo de un salón de clase mediante los pasos de un alumno puede llevar a la utilización de las fracciones. El niño se sirve espontáneamente de las fracciones más simples que conoce, sin que el maestro haya introducido previamente la noción correspondiente. La comprensión de esa noción sólo queda establecida si se presenta bajo formas distintas, lo que exige varios ejercicios. Decroly propone dos grupos de ejercicios distintos, por medio de los cuales el niño generaliza las nociones descubiertas durante las aplicaciones. Al principio tendrá que hacer nuevas observaciones con motivo del estudio de otros centros

de interés en que pueden intervenir, por analogía, medidas y comparaciones parecidas. También habrán cálculos ocasionales y mecánicos. Las dos clases de ejercicios parten siempre de la intuición que nace por medio de medidas, pesajes, acciones siempre personales. Lo esencial no será el procedimiento automatizado de una operación, ni aún su simple adquisición, sino la capacidad de juzgar los fenómenos de una manera precisa. Por eso se vuelve amenudo a los ejercicios de equivalencia. Veamos, por ejemplo, un ejercicio citado por Decroly y Amélie Hamaïde, relativo a la noción de tiempo. Se trata de un ejercicio realizado con el péndulo, en primer año, en el tercer trimestre, con niños de 6 a 7 años:

Francisca, Juanita y Juan escriben una misma frase, en el pizarrón, que ellos han elegido. Después de escribir:

—Yo soy el más rápido, dice Juan (6 años y medio), en 45 segundos.

—Luego yo, dice Juanita (6 años), 50 segundos.

—Luego yo, dice Francisca, (6 años) 60 segundos o sea 1 minuto.

Juan: Yo en 1|2 minuto y 1|4 de minuto, lo que hace 3|4 de minuto.

Juanita: Es cierto, pero yo escribí en 1 minuto menos 10 segundos o en 1|2 minuto más 20 segundos o en 1|2 minuto más 1|3 de minuto.

Francisca (6 años) Oh! yo es muy simple. Es justo 1 minuto o dos medios minutos.

—Pero, en total, ¿cuánto es? pregunta Francisca, etc.

Estos ejemplos prueban que la adquisición de la noción de fracción se hace en función de las colecciones, por una parte y de las mediciones por la otra, es decir, en función de la noción del número y de la noción de medida. No hay pues ninguna separación entre el número y la fracción, es decir, no hay ningun problema particular que separe la génesis de la noción de fracción, de la de número.

El niño se servirá, primero, para sus observaciones, de medidas naturales y no será llevado al sistema métrico y numérico decimal sino en el momento oportuno, en general desde que comienza por la comparación de cantidades discontinuas y de cantidades continuas, porque esas comparaciones sólo significan que las medidas, tanto como los números, son susceptibles de ser estimados en cantidades. La noción de número se elabora en parte mucho antes de la escolaridad obligatoria, por etapas, de lo que hablaremos en la parte sicológica.

Para Decroly, la pedagogía está necesariamente fundada sobre las condiciones del desarrollo del niño: leyes sicofisiológicas e influencias del medio social. Si bien se atiene, menos que Montessori, a los problemas de la didáctica, considera la educación como un todo indisoluble. El elemento esencial de toda su pedagogía es el interés del niño, que debe servir para su preparación.

El material natural que el niño encuentra en clase o fuera de ella no tiene limitación y por eso le ofrece aspectos siempre distintos en función de su estado de desarrollo. En cuanto a la enseñanza escolar, parte de la **observación** de los hechos, luego surgen, por **asociación**, una multitud de estudios y finalmente se busca una **expresión** del conjunto del problema estudiado.

Sería erróneo considerar la etapa de la observación como algo estático. Amélie Hamaide nos llama la atención sogre el carácter esencialmente activo de la observación: "es algo más que percibir". (1) La observación consiste en buscar relaciones, hacer comparaciones, etc. tanto para las estimaciones especiales como temporales. En consecuencia, sería más justo decir que el niño comienza por la observación a ponerse en contacto directo, dentro de lo posible, con las cosas y los acontecimientos, situándolos en un conjunto objetivo, no considerando primero más que su punto de vista, para luego ajustarlo relacionándolo con su escuela, sus camaradas, su familia, etc.

Por la asociación el niño amplía su horizonte intelectual, proyectando la idea adquirida por la observación directa a los acontecimientos lejanos desde el punto de vista espacial (por ejemplo en geografía), y desde el punto de vista temporal (por ejemplo en historia). Esta extensión se hace por medio de las comprobaciones ajenas utilizando cualquier técnica: libros, revistas, relatos, imágenes, cine.

La expresión, finalmente, tiene diversas formas: concreta, mediante los trabajos manuales o el dibujo, abstracta, por las lenguas (oralmente o por escrito), el teatro o las conversaciones. Todas estas expresiones son susceptibles de cuantificaciones numéricas o geométricas variadas.

En resumen podemos decir con Angela Médici: "La cultura intelectual se desarrolla, en el Ermitage, de la siguiente manera: En lugar de programas comunes, con su división en materias, Decroly estableció los **centros de interés.** Ade-

---

(1) Hamaïde, Amelie: "La Méthode Decroly". Delachaux et Niestlé. Neuchâtel/Paris, 1932.

más la recepción muy pasiva de la materia enseñada está reemplazada por un método que, apoyándose en la actividad del alumno, tiene tres aspectos: la **observación**, la **asociación** y la **expresión**. En fin, los medios por los cuales se obtiene la fijación de las cosas que hay que aprender o bien el contralor de las diferentes nociones adquiridas, son los **juegos educativos** que representan, particularmente para los más pequeños, los deberes y los exámenes". (1)

En oposición con la enseñanza tradicional, dice Jean Piaget, no hay en las escuelas decrolianas un pasaje de las reglas del cálculo a la solución de problemas (casi siempre verbales), pues el punto de partida consiste en un empirismo. En cuanto a la iniciación matemática, sólo después de ese estado concreto es que se trata de comprender el significado de los números y de sus relaciones. (2)

Toda la enseñanza decroliana se basa sobre conjuntos complejos. El niño tiene que encontrarse frente a dos objetos por lo menos, para que pueda afirmarse la tendencia lógica de identificar o diferenciar las cosas y los objetos para llegar a una síntesis. El material se presentará en función de dificultades crecientes. "En lo que concierne a las operaciones (matemáticas) más complicadas, como la de los números decimales por ejemplo, sólo se le presentarán al niño en el momento en que, deseando una mayor precisión en sus investigaciones, aporte un mayor interés y por consecuencia una mayor facilidad". (3)

Si Montessori procede analíticamente, es decir, analizando sucesivamente las diversas funciones, para ofrecer al niño las posibilidades de ejercerlas y si preve, por la construcción de un material especial, ejercicios para desarrollar esas funciones que luego integrará, Decroly considera todo objeto en su complejidad total natural y el niño es invitado a preocuparse.

El niño parte pues de una totalidad y pasa luego el análisis y a la síntesis Es lo que Decroly llama la función de globalización. El niño considera de golpe conjuntos, totalidades perceptivas, así como los pedagogos trabajan con representaciones intuitivas, pero también con conjuntos de situaciones, de acciones etc. Es por esto precisamente que

---

(1) Medici, Angela: L'éducation nouvelle.

(2) Piaget, Jean: "Examens des méthodes nouvelles". Encyclopedie Française, tome XV, Paris. 1939.

(3) Hamaïde Amelie: op. cit.

se encuentra en el método decroliano esa preocupación por lo real, sobre todo en lo que concierne a los juegos. No se cultivan alternativamente, como en el método de Montessori, ciertas funciones que se tratan de aislar artificialmente, sino que como la vida misma lo muestra sólo hay actos complejos. Dicho de otro modo: la escuela Decroly no separa las distintas funciones sensoriales, motrices e intelectuales, porque sólo son significativas como actividades complejas. Para que el niño se interese es necesario que esos conjuntos se orienten hacia un fin que se trata de alcanzar y que corresponde a un interés provocado por una necesidad. Por esto es por lo que no se puede prever el material, ya que éste será variable de una experiencia a otra, de un sujeto a otro. Es así como no se encuentra en Decroly el material de formas geométricas, las superficies coloreadas, etc. establecido con carácter permanente. En su libro, ya citado, escrito con la colaboración de la señorita Monchamp, precisa bien sus ideas: "En general, hemos evitado en la confección de nuestros ejercicios, todas las formas geométricas para reemplazarlas por formas vivas que recuerdan al niño, además de la noción sensorial, actos y objetos conocidos, siendo por consecuencia capaces de excitar su interés y de atraer su atención".

La obra pedagógica de Decroly es aún más comprensible si se la compara sistemáticamente con la de Montessori y otros pedagogos partidarios de la imagen y de la intuición. Lo que importa para Montessori como para Decroly es la experiencia física, es decir, la adquisición pura y simple de conocimientos sobre las propiedades físicas de los objetos. Montessori considera que hay que partir de los elementos para comprender la totalidad, mientras que Decroly parte de una totalidad para luego analizarla. La inversión de la relación entre lo simple y lo complejo no impide que ambos educadores se acerquen sobre los problemas de abstracción. Son las imágenes, las estructuras físicas y perceptivas las que provocan las intuiciones. La actividad del niño consiste en modificar, en variar, en enriquecer las estructuras presentes por una exploración activa, dice Montessori; en cambio, para Decroly es por medidas para las que la acción considerada es el modelo. La diferencia es por eso la siguiente: la variación de las estructuras perceptivas puede ser presentada por otro, en el caso de Montessori y en cambio, en el caso Decroly, se basa en una actividad propia.

La enseñanza decroliana se realiza en función íntima con la naturaleza y el medio que rodean al niño. La observación no es pasiva, como para Lay Kühnel y en un cierto

grado menor para Montessori, al invitar al niño a juzgar datos estáticos, sino que la observación consiste en un análisis por descomposiciones y reconstrucciones, mediciones, en suma, obrando efectivamente por una manipulación concreta. Mientras que en Montessori la actividad sólo tiene por función variar las imágenes que se pueden relacionar unas con otras, la actividad decroliana es creadora y no consiste solamente en relacionar observaciones pasivas sino en construir nuevas propiedades perceptivas. Esto implica evidentemente una concepción genética. El material con el que actúa el niño en las escuelas decrolianas no es el mismo para todas las edades. Pero por su elección espontánea se adapta a las etapas del desarrollo mental. La enseñanza es a la vez individual y colectiva en el sentido de que el material, a diferencia con el de Montessori, no es el mismo para las distintas clases y amenudo varía de un alumno a otro, prestándose simultáneamente a un trabajo por equipos. Mientras que para Montessori la acción y la percepción están separadas y se influyen mutuamente, para Decroly forman una unidad funcional y recíproca y se mantendrán como función compleja y global en la enseñanza durante toda la escolaridad.

Decroly colocó la escuela en la vida cotidiana. La preocupación pedagógica, para él, tiene por fin la formación de ciudadanos útiles a la sociedad del futuro y es por esa razón que reemplazó la enseñanza habitual por el trabajo colectivo, realizado por individualidades diferentes.

Así como lo era para Decroly, la pedagogía de la Casa de los Pequeños de Ginebra es funcional y si las dos fundadoras M. Audemars y L. Lafendel pusieron en práctica los procedimientos de la educación funcional, constantemente fueron influídas y alentadas por las ciencias de la educación y las investigaciones sicológicas emprendidas por el Instituto J. J. Rousseau, al que la Casa de los Pequeños está vinculada como centro de investigaciones sicopedagógicas y como centro de formación de futuras maestras jardineras.

El trabajo de la Casa de los Pequeños se caracteriza pues por su contacto íntimo con la sicología experimental y funcional de Eduardo Claparede y sus colaboradores, según el cual el niño sólo puede desarrollar su personalidad cuando se encuentra en un medio que le es favorable. Ese desarrollo exige una observación intensa del niño, de sus posibilidades y de su crecimiento físico y mental y las leyes que se deduzcan indicarán las aplicaciones pedagógicas. El niño se desarrolla solo, pero en función de los prin-

cipios del crecimiento, porque ha nacido experimentador, constructor y productor y debe nutrirse de experiencias personales según la divisa "Por la acción al pensamiento".

Como la condición de la educación racional es el conocimiento de las etapas del desarrollo infantil, conviene caracterizar esas etapas y sus posibilidades de aplicación pedagógica. Audemars y Lafendel distinguen tres etapas consecutivas que abarcan de los 3 a los 10 años, sin que se pueda precisar exactamente los límites de ellas. Tendríamos así:

Una **primera etapa** con niños de 3 a 5 años aproximadamente, no teniendo en cuenta las diferencias extremas. Es la etapa durante la cual el niño adapta las cosas a sí mismo, a su fantasía y sus necesidades.

La **segunda etapa** comprende los niños de 5 a 7 años y se caracteriza porque la actividad motriz se une con la actividad mental, mientras que esa unión no existe todavía en la primera etapa.

En fin, la **tercera etapa**, la de los niños de 7 a 10 años, marca un progreso sensible en el sentido de que el niño comienza a adaptarse a las exigencias del medio.

La primera etapa constituye un estado de egocentrismo puro: el niño comienza a disociar el yo físico del medio en que vive, pero esto sólo ocurre para la actividad muscular y mecánica sin objeto determinado o como lo expresan las dos educadoras: "El movimiento por el movimiento mismo; el pensamiento está ahogado por la acción", lo que corresponde a la "Funktionlust" descripta por Bühler. Este es también el período de las atenciones perceptivas y de los hábitos, tales como la observación visual o auditiva y la obediencia.

La segunda etapa marca un progreso en el sentido de la relación entre la actividad propia y la actividad mental de la que resultan las primeras creaciones intencionales y las primeras actividades reflexivas, pero sin que todavía exista una adaptación al medio; por consecuencia el niño sigue siendo esencialmente egocéntrico en todo lo que emprende. Los movimientos ya tienen un fin y la acción provoca el pensamiento, majorando la rapidez de las actividades que ahora son reflexivas, pero sólo para sus propias necesidades y para la primera formación de las atenciones y de los hábitos, por ejemplo de la memoria, de la iniciativa, de la perseverancia y del orden.

En fin, en la tercera etapa el niño llega a coordinar la actividad de su mano y la de su cerebro, lo que provoca una tendencia al equilibrio entre el pensamiento y el mo-

vimiento y permite la adaptación de la acción personal a las cosas. La actividad es desde entonces ordenada porque el movimiento está sometido al pensamiento, el cual precede a la acción. De ese modo el niño tiene en cuenta al medio y pierde su egocentrismo anterior. Por esto es que el niño puede disciplinar su atención y sus medios, tales como la memoria, el razonamiento, el espíritu de investigación y la concentración.

Por lo tanto, si el niño pequeño sólo conocía una curiosidad sensorial, ahora llega a alcanzar una curiosidad científica. Dicho de otro modo: el niño, al principio, sólo se interesa por las propiedades físicas de las cosas (satisfacción visual) y luego desea utilizar la materia con un propósito (satisfacción intencional) y por fin querría conocer los mecanismos de las cosas (satisfacción intelectual y moral). La experiencia infantil pasa pues de la experiencia física pura a una experiencia más personal. Primero hay concentración sobre el objeto y luego equilibrio entre el objeto y el yo.

Para favorecer en el niño, mediante el trabajo de sus manos, la adquisición de su pensamiento, Audemars y Lafendel inventaron un rico material de enseñanza. Si la escuela tradicional trató de reformar los programas escolares mediante la introducción, en cada edad, de una o de varias horas de trabajos manuales, para interrumpir el programa puramente intelectual y muy recargado, las educadoras ginebrinas elevaron el trabajo manual como principio de toda adquisición intelectual. Esas actividades deben consistir en investigaciones libres y espontáneas y respetar la etapa de desarrollo del niño. El material tiene un doble fin: el de "permitir al niño seguir su camino" y el de representar, simultáneamente, las estructuras concretas que corresponden a las estructuras reales que, más tarde, intervendrán cotidianamente.

Por eso el método de la Casa de los Pequeños de Ginebra es un método sintético, pero el material puesto a disposición de los niños no sólo está concebido en forma más amplia, sino también con un significado distinto del montessoriano. Mientras que Montessori trata de obtener un pasaje directo de las sensaciones (provocadas por su material didáctico) a los pensamientos, el material de Audemars y Lafendel sirve primero a la experiencia física y luego a la coordinación de los movimientos propios, según una estructura mental preconcebida. Montessori considera una isomorfía de las estructuras materiales y mentales; Audemars y Lafendel ven esa isomorfia desde el ángulo de los movimien-

tos propios asociados a los pensamientos. Para Montessori existe, por el movimiento propio, una especie de transferencia a la inteligencia de las estructuras estáticas, inherentes al material. Para Audemars y Lafendel la estructura de los movimientos es esencialmente activa. Por isomorfia se pasa de la estructura activa a la estructura intelectual. El material sólo se introduce paar provocar la actividad del niño. A pesar de ciertas similitudes los dos materiales didácticos se distinguen, por lo tanto, por sus funciones respectivas.

La concepción del número se adquiere, por ejemplo, por la construcción de casas, agrupando bolas, enfilando discos de diversos colores, siempre según las leyes impuestas por el material. Esas construcciones espontáneas del niño, bien ajustadas por el material a la etapa de su desarrollo, le proporcionan las primeras impresiones de dimensión, de cantidad, de forma.

¿Cuáles son las características de la evolución de esas construcciones? Las educadoras han podido observar que las construcciones con bloques y los grabados en dibujo corresponden a las primeras impresiones del número, seguidas bien pronto por las primeras nociones de dimensión y de cantidad. De ese modo el niño discierne también las cantidades en juego y distingue con seguridad las formas y los colores que luego sabe reproducir en su dibujo por imitación reflexiva. Se asiste entonces a una especie de pasaje de la percepción del número a su concepción, pero esto sólo es posible gracias al interés del niño por la locomoción que domina toda percepción pasiva y que también provoca las primeras nociones de la geometría euclidiana. El dibujo del niño se distingue entonces por su tendencia a la armonía, la preocupación por la belleza y la verdad (realismo), su exactitud y su precisión. "Si durante estos primeros años el trabajo individual es el camino más seguro para que el niño pueda adquirir las nociones que le son indispensables, es necesario que tenga a su disposición los medios que favorecen su experiencia personal, que provocan el descubrimiento, que estimulan el espíritu de curiosidad y de investigación, en una palabra que provocan nuevos intereses y apetitos".

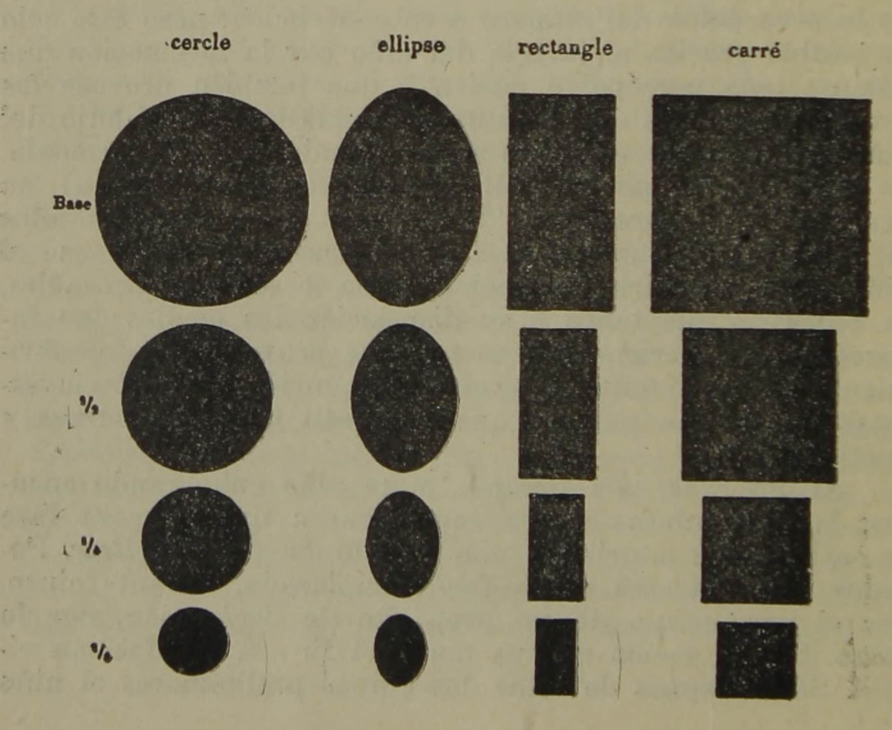
Al observar, por ejemplo, a un niño enhebrando cuentas, las educadoras suizas comprobaron una primera fase de satisfacción motriz. El niño enhebraba por enhebrar. Pasados diez días esa etapa fue reemplazada, durante cinco, por el predominio de un propósito de decoración, por lo tanto de una acción que ya tenía un fin: la satisfacción visual. Sólo después de estas dos etapas preliminares el niño

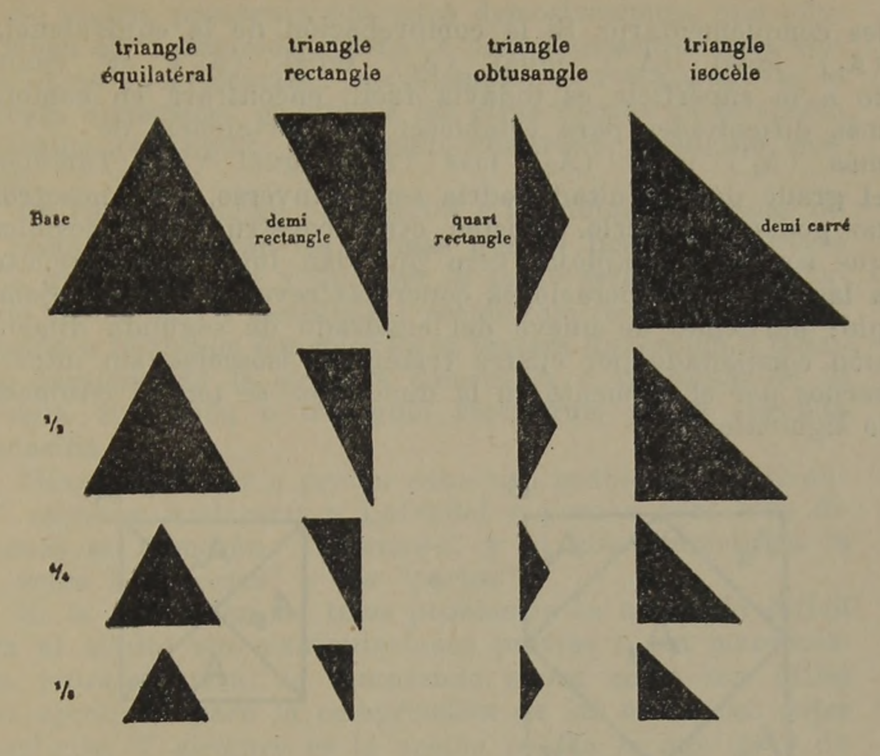
comenzó a enhebrar de acuerdo a una ley de valor, por lo tanto de número, proporcionando una satisfacción intelectual. Esa observación que damos a título de ejemplo constituye la base de todo el material de la Casa de los pequeños. Es sobre esa base que se estudia el útil que necesita el niño que franquea con más dificultad esas etapas.

Retengamos que la noción de número interviene siempre que la satisfacción visual y la percepción están subordinadas a una satisfacción intelectual, mediante la coordinación reflexiva.

El material de la Casa de los pequeños que conduce a los niños a la noción de fracción es muy rico y esencialmente —aparte de todas las otras experiencias espontáneas que el niño puede hacer mediante sus construcciones— comprende dos clases: un juego de geometría y un juego de construcciones en el espacio.

El juego de superficies destaca las formas geométricas, los colores y las dimensiones. Está compuesto de un rico surtido de formas en cartones de colores. La forma base es el decímetro cuadrado y todas las formas derivan geométricamente unas de otras. Una caja contendrá, bien clasificadas, 576 formas geométricas, cada especie estando representada varias veces. Esa caja tiene siempre dos bandejas cuyo contenido (en lo que se refiere únicamente a las formas geométricas y haciendo abstracción de los colores) es el siguiente:

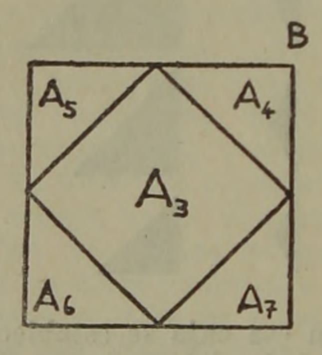


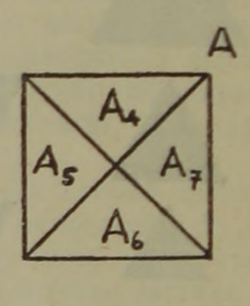


"Las superficies contenidas en esa caja se establecieron de acuerdo a una base única: el lado del mayor cuadrado que mide 10 cm. Cada forma está reproducida en cuatro dimensiones distintas: la mitad, el cuarto y el octavo del primer tamaño. Si se las compara se podrá observar que derivan estrechamente unas de otras: los círculos se inscriben en los cuadrados, los cuadrados en los círculos, las elipses en los círculos, los círculos en las elipses, etc. Los rectángulos y todos los triángulos tienen una relación constante e inmediata con los cuadrados. Ejemplo: el rectángulo más pequeño es 1|8 del cuadrado mayor. El triángulo más pequeño es la mitad del pequeño rectángulo, por lo tanto 1|16 del rectángulo grande y 1|32 del cuadrado mayor, etc."

Aparte las comparaciones y superposiciones libres del niño las construcciones se pueden sugerir por la acción y no verbalmente. Es así que, por ejemplo, son posibles las combinaciones siguientes: El niño comprobará fácilmente que el rectángulo de base (A_1') recubre la mitad del cuadrado de base (B) y por lo tanto que (A_1) más (A_1') es igual a B, siendo (A_1') el rectángulo complementario. En fin tomando el mismo cuadrado de base (B) el niño descubrirá un día que el triángulo insósceles de base (A_2) cubrirá la mitad del cuadrado y que por lo tanto (A_2) más (A_2') es igual a B, siendo (A_2') el triángulo isósce-

les complementario. Si la comprobación de la equivalencia (A_1) igual (A_1') igual (A_2) igual (A_2') en cuanto a la superficie es todavía fácil, encontrará en cambio más dificultades para establecer la equivalencia de (A_1) más (A_1') igual (A_2) más (A_2') igual (B). También el grado de dificultad podría ser el inverso, pero nosotros no podemos saberlo. Existen otras construcciones posibles que son más complejas pero que dan lugar precisamente a las primeras operaciones concretas reversibles; por ejemplo: partiendo de nuevo del cuadrado de segunda dimensión completado por cuatro triángulos isósceles, sin interesarnos por el momento en la dimensión, se tendrá entonces lo siguiente:





$A_3+A_4+A_5+A_6+A_7=B$. Si se reagrupasen los triángulos isósceles A_4,A_5,A_6,A_7 se podrían formar con ellos un cuadrado de las mismas dimensiones que el cuadrado A_3 (colocándolos por ejemplo uno sobre el otro). Por lo tanto se tendrá (ver la figura que antecede): $A_3=A_4+A_5+A_6+A_7$

A partir de la constatación de las equivalencias de los dos cuadrados es necesario que el niño admita la igualdad de la suma de las superficies de los cuatro triángulos A_4, A_5, A_6, A_7 en la posición de la figura de la derecha y en la de la izquierda. En efecto: si admite esa equivalencia lo hará gracias a una transferencia por la acción y haciendo abstracción de la simple percepción estática.

Es así como el niño, por un razonamiento simple, llega a la conclusión que el rectángulo A_1 equivaldría al triángulo isósceles A_2 el cual a su vez equivaldría al cuadrado de segunda dimensión A_3 o A_3' es decir, establecerá la triple igualdad por simultaneidad:

$A_1 = A_2$ $\qquad$ A_1

$A_2 = A_3$ $\qquad$ // \\

$A_3 = A_1$ $\qquad$ $A_2 = A_3$

Se podría proseguir con estas demostraciones, que nunca deben ser formuladas verbal o simbólicamente, para muchas otras equivalencias; por ejemplo, el rectángulo de la "tercera dimensión" es igual a las otras formas de la misma dimensión (triángulo, rectángulo, cuadrado, triángulo isósceles).

En fin, se podrían plantearles a los niños problemas tales como: "encontrar las formas que se inscriben 8 veces en el gran cuadrado y que por lo tanto serán 1|8 del cuadrado de la base". Resultado: rectángulo de la tercera dimensión o triángulo isósceles de la tercera dimensión o triángulo escaleno de la primera dimensión o triángulo de la segunda dimensión o triángulo rectángulo de la segunda dimensión.

''Hay que llegar a probar esto: son problemas cautivantes" escriben Audemars y Lafendel y poco a poco esas divisiones se llamarán "fracciones" y el niño descubrirá la ley entre los "cortes" y las "partes".

Si la resolución de tales problemas es amenudo difícil para el adulto sin manipulaciones previas o sin manipulación representativa, se comprende ahora como son útiles tales ejercicios para la comprensión de las relaciones entre superficies. Y siempre es la acción propia la que sirve de soporte a la comprensión.

Este material de la Casa de los Pequeños de Ginebra recuerda fácilmente la primera serie de cajas geométricas de María Montessori. Pero mientras ésta no reconoce sino una sola dimensión para cada forma representada, el material ginebrino utiliza —como lo hemos visto— distintas dimensiones que permiten no sólo realizar la correspondencia simple, sino también juxtaposiciones múltiples y por lo tanto toda una serie de equivalencias y de igualdades. En fin los encuadramientos de María Montessori reducen desde el comienzo el número de errores posibles y el grado de libertad para realizar la correspondencia.

Tanto el material de Montessori como el de Audemars y Lafendel se limitan a la introducción de las fracciones de la forma $1|2^{n}$' y por lo tanto a todas las fracciones que sólo hacen intervenir las operaciones de dicotomía, mientras que los problemas de trisección o aún los de participación en cinco son descuidados. Pero para Montessori la primera serie de encajes geométricos no es más que una preparación general para la introducción de la noción de fracción y sólo la segunda serie de encajes geométricos es la que hace intervenir las fracciones mismas, comprendidos los tercios, los quintos, etc.

Audemars y Lafendel consideran que su juego de superficies inicia a los niños en las fracciones mismas y renuncian a un juego suplementario de sectores que ofrecerían pocas posibilidades de relacionar. Entienden también que el reparto en sectores es solamente un caso particular, mientras que su juego de superficies ofrece muchas más posibilidades.

Al considerar que la noción de fracción sólo se adquiere cuando es independiente del material al que se aplica, Audemars y Lafendel han juzgado util ofrecer otras posibilidades de movimientos propios, presentando estructuras similares. Es así que el juego de construcción presenta las mismas combinaciones tradicionales. El principio es el mismo y el juego completo comprende dos cajas. "El bloque de la caja A es un decímetro cúbico. Los otros bloques presentan, en formas diversas, las fracciones siguientes: 1|2, 1|4, 1|8. La caja B ofrece al niño prismas de igual forma en dimensiones reducidas. La arista del pequeño cubo mide 5 centímetros y como la pequeña fracción de este cubo es 1|16, el pequeño prisma representa pues el 1|128 del decímetro cúbico de la caja A. Los bloques están perforados y se unen. Por medio de clavijas y tabletas de ensamblado''.

Es inútil prolongar esta descripción; daremos únicamente un ejemplo típico de la construcción elemental posible.

Supongamos que se le da al niño unos cubos de madera de 10 cm. de lado. Además tendrá a su disposición objetos en madera pero entre ellos habrá siempre dos de formas iguales que unidos puedan formar el mismo cubo. Este reparto del cubo en dos puede hacerse de distintas maneras: por ejemplo, siguiendo la superficie de simetría y pasando por dos aristas opuestas (A_1 y A'_1) o siguiendo la superficie pasando por las caras opuestas paralelamente a las otras dos superficies opuestas. (A_2 y A'_2). Si se deja al niño jugar espontáneamente con este material, se observará los problemas que se le plantean y los descubrimientos que hará con esos objetos de madera: primero la posibilidad de reunir las partes A_1 y A'_1 o A_2 y A'_2 en un solo cuerpo: $A_1+A'_1$ ($A_1=A'_1$) y A_2 y A'_2 ($A_2=A'_2$), ———— etc.; más tarde la equivalencia entre A_1 y A_2 (o A'_2), por lo tanto $A_1=A'_1=A_2=A'_2$.—

Problemas análogos se plantearán cuando se haga la división en cuatro de los mismos objetos. El paralelismo en la estructura de una tal construcción se constata con los ejemplos en dos dimensiones ya propuestos.

El método de la Casa de los Pequeños de Ginebra, aun-

que en su origen sea esencialmente sintético, pone en evidencia no ya una construcción sino un conjunto de soluciones equivalentes, de movimientos, de acciones y el niño adquirirá sus nociones después de haber establecido esas identidades y esas equivalencias de las diferentes soluciones. Las nociones son así el resultado inmediato de la acción propia o de la operación que relaciona los elementos materiales y no de las sensaciones directas o indirectas como en Montessori.

2. — *Crítica de las concepciones antiguas*

¿Cuáles son las críticas que se han hecho a los precursores de la escuela activa? Si los antiguos métodos de la enseñanza gráfica e intuitiva han desaparecido casi totalmente, se encuentran todavía numerosas escuelas decrolianas y el material didáctico de Audemars y Lafendel ha sido adoptado en un gran número de escuelas maternales en Francia, lo que es una prueba de su eficacia. Las críticas formuladas a esos precursores son, en general, menos agudas que en la época de los primeros métodos intuitivos.

Las proposiciones de Ovidio Decroly no alcanzaron nunca a constituir un sistema coherente de una teoría de la inteligencia. Es más bien la mezcla de una enseñanza gráfica e intuitiva (presentación de esquemas gráficos en el sentido de Lay) con una enseñanza de escuela activa, en la que la actividad no es sino una forma de expresión, precedida por la etapa de observación pero sin representar un papel constructor bien definido.

Por el contrario, John Dewey, así como Audemars y Lafendel, considera más un vínculo directo entre la acción propia del niño y la actividad intelectual, de tal manera que para él —en oposición a las ideas de Decroly — las nociones están ligadas a las operaciones. Por lo tanto, la acción creadora caracteriza la unión entre el sujeto y el mundo, mientras que para Decroly la acción no es sino una relación que se establece gracias al interés suscitado por las tensiones del medio. Dewey (1) no niega el papel esencial del interés pero para él "la percepción sensorial no ocurre por si misma... sino porque representa un factor indispensable para tener éxito en lo que se tiene interés en hacer". El pensamiento no sería, por lo tanto, sino un instrumento para resolver los problemas que se plan-

(1) Dewey, John: "How we think". New York, 1939.

tean no teniendo ningún fin en si mismo. El pensamiento sólo puede comprenderse como un util de la acción y las impresiones estáticas del exterior, aún cuando sean sucesivas, no pueden transformarse en un contenido del espíritu.

Una acción verdadera, sólo sobre las imágenes, es imposible y la escuela de John Dewey debe parecerse a un laboratorio con posibilidades de manipulaciones concretas con los objetos, dirigendo siempre esas actividades hacia las realidades de la vida cotidiana.

Esta concepción ha sido puesta ampliamente en práctica por Decroly, mientras que Audemars y Lafendel le han dado una importancia menor, introduciendo un material artificial. Su material, como el de Montessori, es colectivo en el sentido de que siempre es el mismo para cada alumno, independiente de los intereses individuales y de los distintos tipos representados en una clase o en una escuela. Sin embargo, el material de Audemars y Lafendel se distingue bien del material de Montessori, ya que consideran importante la construcción de igualdades, de equivalencias, de comparaciones mediante medidas espontáneas y no un simple registro de la imagen. Asimismo este material, a diferencia del de Montessori, permite hacer esas construcciones gracias a formas y tamaños variados. Dewey y Decroly mencionan también la necesidad de esas operaciones, pero no se expresan explícitamente sobre la naturaleza exacta y el contenido de un material didáctico como lo hacen Audemars y Lafendel. Es lástima que el principio sobre el que descansa su material sea el de la simple dicotomía, lo que impide proceder a la construcción de la fracción 1|3 o 1|5, etc. En fin, la forma de base es el cuadrado y todas las construcciones sobre los rectángulos y los círculos son imposibles, aún con la ayuda de todo otro material didáctico que han propuesto las dos educadoras.

¿Cuáles son las leyes de elaboración de las nociones matemáticas? Para Dewey consisten en una especie de juego de interferencias mediante el cual se relacionan las impresiones con sus significados y los contenidos. De ese modo habría para él una cierta asociación simple entre las impresiones y sus significados, si no agregase que esa relación es esencialmente activa, gracias a búsquedas y verificaciones por medio de medidas y comparaciones o cuantitativas, parecidas a las numerosas actividades de expresión propuestas por Ovidio Decroly.

Mientras Decroly no da ninguna explicación precisa sobre la naturaleza explícita del número y de la medida, que no son para él sino un medio de expresión, Dewey es-

tablece que el hecho de coleccionar objetos parecidos y seriarlos prepara las nociones de número cardinal y ordinal. Audemars y Lafendel también se expresan sobre la naturaleza intrínseca del génesis del número, pero sin embargo no precisan la teoría correspondiente. Si bien preconizan construcciones espontáneas para establecer la equivalencia de las igualdades, etc., parece que se refieren constantemente a las propiedades geométricas de su material y no a los mecanismos de elaboración de las nociones. A pesar de esas actividades espontáneas en la Casa de los Pequeños se ha recurrido siempre a las estructuras perceptivas o físicas, como en las escuelas de Decroly. Sin embargo, esas estructuras sólo tendrían un sentido en relación con sus significados. El esfuerzo de Audemars y Lafendel para ligar la percepción a la manipulación creando entre ellas un equilibrio provocado por regulaciones contínuas y recíprocas, impiden al niño edificar una estructura mental independiente.

Todos los precursores de la escuela activa han reconocido la necesidad de una manipulación concreta en relación con una actividad mental creadora, pero sin poder separarse enteramente de las teorías de la enseñanza gráfica e intuitiva, por no poder dar una justificación explícita de las acciones y de las leyes que las rigen.

3. — *Las concepciones modernas*

¿La escuela activa actual ha conseguido vencer esas dificultades? La idea fundamental ha quedado: la pedagogía de la escuela activa mantiene y desarrolla, todavía, una enseñanza fundada sobre las actividades espontáneas del niño arraigada en la realidad que enriquece el material concreto. La influencia de las ideas de Dewey y Decroly sigue siendo considerable: la enseñanza está basada en el interés del niño. Si, por ejemplo, se procede a un ejercicio sobre medidas, no hay una preocupación excesiva sobre las leyes intrínsecas que las rigen.

Pero hay un punto que es necesario destacar: el desarrollo simultáneo de la escuela activa y de la enseñanza gráfica e intuitiva provoca numerosas confusiones. En efecto, la escuela activa al esforzarse por descubrir las leyes intrínsecas que rigen las manipulaciones que conducen a la génesis espontánea de las nociones toma, a menudo, (con razón o sin ella), de la enseñanza gráfica e intuitiva su concepción de una isomorfía entre las estructuras perceptivas o físicas y las estructuras mentales; una publicación recien-

te de Jules Kefer lo demuestra. (1). En ella proporciona un cuadro fiel de la iniciación en el cálculo por medio del método gráfico e intuitivo basándolo, sistemáticamente, sobre las teorías sicológicas de la Forma. Pero lo curioso es que León Jeunehomme, haciendo alusión a la enseñanza gráfica, dice en su introducción: "Estas cosas, ya conocidas, Kefer las expone con gran claridad" y más lejos "es evidente que los objetos destinados a las manipulaciones no deben alinearse entre los ojos de los niños, sino que hay que presentarlos en forma de "figuras perceptivas", de "esquemas", de "agrupaciones" o como también se dice de "constelaciones". La palabra no importa ya que todo el mundo está de acuerdo en el principio". Cree además (y es aquí que se manifiesta el dualismo fundamental, para no decir el equívoco de las inspiraciones sicológicas) que puede afirmar, recordando la sicología de Jean Piaget: "La palabra no sirve para nada, es vano y hasta perjudicial que nos desgañitemos. El dibujo es coadyuvante no despreciable, pero es insuficiente. Es necesaria la acción".

Este conflicto es casi general y aún los programas oficiales no diferencian las dos tendencias. Podemos citar como ejemplo a Nueva Zelandia, donde el problema es tan candente como en Europa.

Lo que hay de común en las soluciones modernas es el punto de vista genético, posiblemente menos por convicción real que por necesidad práctica: se comienza por la manipulación concreta pero se termina, necesariamente, con una enseñanza sistemática y abstracta, sin precisar, sin embargo, los pasajes de esa evolución.

Si se contempla la escuela activa desde el ángulo genético se comprende que la imagen y la intuición sólo jueguen papeles adecuados para una cierta etapa del desarrollo mental. Si el niño llega a conocer las cosas mediante una manipulación preliminar, no se limita a obtener sus conocimientos de comparaciones perceptivas, sino de las transformaciones que introduce mediante sus acciones. Parece evidente que desde entonces sólo la imagen limitaría la adquisición de nociones nuevas por su carácter simplemente estático. Si los conocimientos se amplían indefinidamente no puede pues hacerse en función de las estructuras perceptivas o físicas, sino en función de las acciones mismas. La actual escuela activa no acentúa, sino parcialmente las acciones de los niños y, al mismo tiempo, continúa atribuyén-

---

(1) Kéfer, Yules: "**Initiation au Calcul**" Editions Désoer, Liège, 1953.

dole un privilegio abusivo a las estructuras perceptivas, sin recordar esta verdad esencial: la abstracción no puede constituirse sólo en función de las colecciones de imágenes, sino en función de las acciones mismas; sólo las primeras estructuraciones de las acciones propias se prolongarán en estructuraciones interiorizadas en una forma operatoria. Las nociones se construirán según las operaciones mentales correspondientes, en su fuente, a las primeras acciones concretas.

Pero antes de exponer soluciones pedagógicas que hagan intervenir las operaciones reales e interiorizadas, revisaremos algunos de los más conocidos ejemplos, los que ilustrarán este conflicto entre el papel de la imagen y el de la acción, entre lo abstracto y lo concreto. Primero tomaremos a dos pedagogos americanos J. de May y Herbert P. Spitzer y a un pedagogo belga G. Cuisenaire, generalizando el problema mediante una exposición de los programas de Nueva Zelandia. Esto nos llevará a exponer rápidamente las ideas didácticas de Hans Aebli quien, si no nos equivocamos, es el único que haya analizado las estructuras de las manifestaciones concretas, basándose para ello en las concepciones sicológicas de Piaget.

Encontramos sistemas didácticos que preven etapas diferenciadas para hacer un pasaje entre lo concreto y lo abstracto. Es así que May distingue cuatro etapas para la iniciación matemática: La **primera etapa** es puramente concreta. El niño manipularía objetos concretos, lo que le ofrece una multitud de posibilidades. La **segunda etapa** está reservada a la manipulación de imágenes de objetos familiares, que reemplazan a los objetos reales. La mayoría de los maestros no parecen reconocer una diferencia entre las dos etapas. La **tercera etapa** concierne al estudio de materiales semiconcretos y representaciones intuitivas, es decir, basándose sobre imágenes más abstractas tales como los esquemas gráficos. En fin, la **cuarta etapa** es la de los símbolos que representan cantidades, por ejemplo, cifras. Sólo en este momento el niño posee la noción abstracta del número. (1). De este modo la enseñanza gráfica e intuitiva cumple una función bien diferente: sólo representa una transición de simbolización. Sin embargo, el hecho de que May no dé ninguna precisión sobre el carácter general del material concreto, hace sospechar que sólo la percepción de

---

(1) De May, Amy J.: Arithmetic Meanings. Childhood Education. XI: Jun. 1935.

los objetos en las situaciones más diversas puede ser interiorizada tal cual y fijada por la riqueza de colecciones de imágenes que permiten arraigarla en el espíritu.

Hemos visto que Decroly propone al niño encontrar una expresión concreta para las nociones. En las escuelas decrolianas se parte de situaciones reales complejas y se reproducen concretamente en ejercicios. No se hace intervenir analíticamente un sentido después del otro como en María Montessori, sino que se tiene en cuenta globalmente las funciones de todos los sentidos, que se ayudan mutuamente. Lo mismo piensan muchos educadores actuales. Es posible que, a causa de la pobreza de las escuelas de muchos países, se vea reaparecer, a menudo, un método que ya hacía mucho tiempo que no se empleaba: el cálculo mediante los dedos. Sin embargo, si antes el niño enumeraba sus dedos en la actualidad se los utiliza, preferentemente, como medio de expresión y descripción global. "Si todos los niños han comprendido por la expresión repetida de conjuntos de 1 a 10 que tienen cinco dedos en cada mano, tomarán los dedos de una mano como unidad superior a cinco y podrán rápidamente (aún con los ojos cerrados) expresar por sus dedos los números 6, 7, 8, 9, 10" (Max Walper).

De este ejemplo surge que esos métodos concretos apenas sobrepasan las teorías de la enseñanza gráfica e intuitiva, puesto que la actividad parece reducirse a una demostración tardía y no a una construcción. Se podría por lo tanto, distinguir entre el método demostrativo y el método experimental. El más en voga actualmente es el método demostrativo bajo dos formas distintas: mediante una se aplica a la enseñanza gráfica e intuitiva desarrollada en el capítulo precedente, mediante la otra introduce un elemento de actividad propiamente dicha de parte del niño como expresión concreta. El método experimental es sinónimo de descubrimiento por acción concreta o forma parte de los métodos heurísticos.

Herbert F. Spitzer, en su libro sobre la enseñanza de la aritmética, duda que el método experimental tenga un lugar en la escuela. Reconoce la necesidad que tiene el niño de basar sus conocimientos numéricos sobre una manipulación concreta, pero piensa que la vida cotidiana le ofrece bastantes posibilidades de ejercicios concretos que pueden provocar el desarrollo natural de una habilidad numérica. (1).

---

(1) Spitzer, Herbert F.: The Teaching of Arithmetic. Houghton Mifflin Co. 1948.

La parte más importante del desarrollo natural de los conocimientos numéricos en el niño es descripta brevemente por Spitzer.

En primer lugar, estaría la facultad de constituir una entidad, un grupo o una colección de entidades emparentadas, pero diferentes. Para que nosotros mismos podamos controlarnos a su respecto, Spitzer propone que consideremos que los cinco dedos de una mano son diferentes entre sí, pero que pueden darnos un entero si se hace abstracción de esas diferencias. Esto conduce a la noción de número cardinal.

La segunda facultad que se desarrolla naturalmente es la correspondencia biunívoca. Esta permite, por ejemplo, decir si todos los alumnos están presentes, estableciendo una correspondencia biunívoca entre alumnos y asientos (o examinando cuántos asientos están vacíos). Así la numeración hablada sería una forma avanzada de la correspondencia biunívoca, ya que todo número es el sustituto de un objeto.

Sin embargo, estas últimas consideraciones no son completas. Los números (símbolos) corresponden sólo a objetos ordenados o a colecciones. Sin embargo, esas dos proposiciones corresponden, en general a las ideas de Dewey en cuanto a la génesis del número, pero mientras éste introduce ejercicios en clase para desarrollar la noción de número cardinal y las correspondencias biunívocas, Herbert F. Spitzer supone terminados esos desarrollos cuando el niño entra en la escuela.

La facultad de determinar de una sola ojeada y sin contar, el número exacto de objetos en un pequeño grupo de objetos no ordenados, tal como tres, cuatro o cinco, es considerado muy importante por Spitzer. De esto ya no hablaremos más. Pero si esta última facultad, según Spitzer, no parece tener relación con las dos primeras, por lo menos el número cardinal se elabora por las clasificaciones, mientras que la simultaneidad del número cardinal y ordinal no parece tener significación particular para Spitzer. Las acciones propias del niño siguen ciertas leyes de la clasificación y de la correspondencia que conducen a la noción de número. Estas leyes dinámicas tienen su origen en lo que se ha percibido, pero no existe ningún lazo entre las estructuras perceptivas y las estructuras lógicas de las acciones.

Por lo tanto, existe en el método experimental una serie de etapas que hay que observar. La acción propia del niño está precedida por la observación más o menos pasi-

va. La imagen que se presenta al niño provoca una actividad consistente en una expresión espontánea. La enseñanza gráfica e intuitiva hacía de todo esto un círculo vicioso. Las percepciones debían sucederse para variar la colección de las imágenes mentales, la acción estaba reducida a provocar esos cambios. El hecho de establecer las equivalencias de las percepciones es el que conducirá a las nociones buscadas. El establecimiento de la equivalencia no sería de ningún modo activo pero constituiría observaciones globales.

G. Cuisenaire, en Bélgica, inventó para los niños un "procedimiento nuevo, experimentado, científico, pedagógico y además atrayente y extremadamente simple" (1). Introdujo en la escuela una serie de reglillas coloreadas que simbolizaban cada uno de los diez números. "El procedimiento de los números en colores asocia el **ver** al **hacer**, al comprender, al calcular, al verificar".

La etapa **visión** consiste en asociar los colores a los números (asociación de los ojos al trabajo de la inteligencia), relacionar las dimensiones con una medida métrica, lo que permite la intervención activa de los ojos y de las manos asociando las percepciones simultáneas y por último, hacer la asociación de los colores y de las dimensiones. "Esta clasificación facilita la identificación, los agrupamientos y las relaciones de los números haciendo la fijación fácil, precisa, duradera. Además encamina hacia la percepción mental (ver sin los ojos)". Hasta aquí el método de Cuisenaire se parece mucho a la enseñanza gráfica e intuitiva pero aportando un elemento nuevo: los colores.

Pero tenemos la segunda etapa: **hacer.** Esta satisface la necesidad de obrar por "la realización espontánea de combinaciones numerosas, libremente inventadas por el niño, basadas sobre las relaciones y las agrupaciones de los números. Estas combinaciones suscitan múltiples formaciones y descomposiciones provocadas por los tanteos y las verificaciones". Luego vendrán las etapas: comprender, calcular y verificar.

El método Cuisenaire está fuertemente arraigado en las ideas de la enseñanza gráfica e intuitiva. Aunque el autor no lo dice especialmente parece que las primeras percepciones provocan la intuición y esta implica una verificación por la experiencia concreta. Por lo tanto las nociones no

---

Cuisenaire, G.: Les nombres en couleurs. Librairie Duculot-Ronlin. Tamines. 1952.

son el resultado directo de la intuición sino que están basadas en la experiencia propia del niño como regulador de las primeras intuiciones provocadas por las percepciones. Esto hace recordar las ideas pedagógicas de Audemars y Lefendel: el niño es experimentador y su empirismo conduce finalmente a las nociones.

El material de Audemars y Lefendel es más rico para combinar los datos, mientras que el sistema de Cuisenaire parece ser más completo. Mientras que Dewey y sus sucesores han establecido una clasificación de las acciones propias posibles, Audemars y Lafendel no dicen una palabra. Vinculan la acción con la percepción, pero sin llegar a reconocer las leyes intrínsecas que les son propias en sus interacciones mutuas.

Esta falta de cohesión entre la percepción y la acción, entre el reconocimiento de una acción y la evolución estructurada de estas acciones, es característica de la mayoría de las metodologías de la escuela activa actual.

En general, se reconoce la utilidad de las manipulaciones de los niños, sin poder, sin embargo, justificar científicamente esa necesidad y sin preocuparse demasiado de las leyes que rigen esas acciones y que permitirían presentar conclusiones sobre la estructura física del material didáctico utilizado. Las tendencias actuales respecto a la enseñanza de las matemáticas elementales por medio de la acción, ofrece las mismas características que la enseñanza gráfica e intuitiva establecida empíricamente. En general, se propone no utilizar un material único, como en Montessori, Audemars y Lefendel (por analogía con las estructuras perceptivas únicas de la enseñanza gráfica e intuitiva, por ejemplo, según Lay o Kühnel), sino que por el contrario hay que variar las posibilidades de la experimentación personal de los niños, mediante un material más rico. Esto correspondería, igualmente, al deseo de hacer toda la enseñanza más real y más natural. Pero muchos educadores y en especial muchas administraciones escolares se oponen a esas ideas, no por principio pedagógico, sino simplemente por razones financieras. Pretenden que el material escolar de la enseñanza gráfica e intuitiva, compuesto por manuales y fichas pero casi siempre de naturaleza colectiva, costaría mucho menos y que, por desgracia, no se puede alcanzar un ideal utópico transformando la escuela en un laboratorio montado a la perfección. El material didáctico concreto y los manuales necesariamente gráficos ¿no pueden acaso coexistir, no son complementarios? "Ningún maestro debería sentirse estrictamente obligado a seguir el orden en

el cual las materias son presentadas en los manuales, ni tampoco sentirse limitado por los métodos que son reco mendados. Nunca un manual puede restringir la acción de un maestro que reflexiona. Simultáneamente se sobreentiende que el maestro con larga experiencia ha desarrollado métodos sólidos y establecido postulados para presentar las diferentes etapas del trabajo. Nadie tiene la intención de suplantar los manuales sino suplirlos sistemáticamente", (Education Gazette: 'The place of the text-book". 1944.)

¿Cuáles son entonces las actuales realizaciones respecto a las técnicas concretas utilizadas en los últimos años de las escuelas maternales y en los primeros años de la escuela primaria? En la etapa preescolar se encuentra a menudo un cierto material froebeliano o montessoriano. En Nueva Zelandia, las prescripciones de los programas de los jardines de infantes se han mejorado eliminando toda memorización y todo "drill". Por el contrario se proponen variados ejercicios concretos:

a) Reunir objetos tales como botones, agujas, etc., en cajas formando con ellos grupos homogéneos (agujas de igual largo, etc.).

b) Construcción de torres con bloques cúbicos o cilindros de madera, pero en volumen diferente (seriación).

c) Ordenar objetos distintos según su tamaño y colocar botones distintos en casilleros preparados al efecto.

d) Para darse cuenta de la relación entre las formas y los tamaños de las figuras geométricas el niño seguirá, con el lápiz o la tiza, los contornos de figuras planas hechas en cartón o en madera.

e) Juntar o reconstruir ciertos juguetes tales como botes, aviones o trenes para rehacer un todo por medio de las partes, descubriendo los lugares correctos. Rompecabezas muy simples, con el mismo fin. Construcción de una casa a la escala del niño mediante bloques de madera de distinto tamaño, lo que le permitirá darse cuenta de las relaciones espaciales.

f) Combinaciones de papeles coloreados de tamaño y forma diferentes, pegándolos, por ejemplo, sobre una cartulina para obtener dibujos, lo que desarrollaría igualmente las relaciones espaciales.

g) Iniciación al lenguaje de las cantidades tales como "grande" y "pequeño", "pesado" y "liviano", "mucho" y "poco", "ancho" y "delgado", etc.

h) Discriminación de las formas, por ejemplo las bandejas de Montessori, con el encasillamiento de formas geo-

métricas planas (también, como ejemplo, las cifras).

Esta primera etapa, constituída por manipulaciones concretas, no tiene numeración hablada. Este ejemplo ilustra la mezcla entre la escuela activa y la enseñanza gráfica e intuitiva, esforzándose por acentuar la manipulación concreta.

Una segunda etapa está reservada a la automatización de la numeración expresando sucesión y a las enumeraciones expresando totalidades y significando el cómputo de un número definido de objetos. (1)

La mayoría de los niños, cuando entran a la escuela, ya saben contar un poco, pero ese mecanismo, en general, casi no tiene relación con lo concreto.

En Nueva Zelandia, con el propósito de estimular esos mecanismos, se usan ciertos cantos infantiles, por ejemplo:

One, two, buckle my shoe,
Three, four, knock at the door,

Una cantidad de objetos distintos debe estar a disposición de los niños para que puedan contarlos, a fin de evitar que asocie los números a un determinado tipo de objetos. Se podría tener a su disposición:

a) Una caja grande con objetos distintos: botones, piedras, carozos, fósforos, etc.

b) Cajas individuales conteniendo los distintos objetos mencionados más arriba.

c) Tarjetas con un cierto número de objetos representados por un dibujo, por ejemplo, dos ojos, dos globos,etc.

Es así como, según las proposiciones de Nueva Zelandia, se introduciría la noción del número dos. Al agregar un segundo bloque no se debe exigir del niño que cuente de acuerdo con los bloques: 1, 2 bloques, sino que el niño debe comprender que los dos bloques forman una especie de unidad nueva llamada "dos" y así sucesivamente con otros ejemplos. Además es necesario ordenar los pares en

---

(1) "Number Work in the Infant Room". Some Suggestions for teachers. School Publications Branch, New Zealand Education Department, 1944.

las formas más distintas que sea posible, según su posición o según los colores:



No se da ninguna indicación sobre la diferencia de las distancias, sólo son distintas las posiciones recíprocas). Más tarde se vuelve a las figuras, pero no a figuras únicas. El niño imita o recubre con cartones coloreados, redondos o cuadrados, las imágenes que se le presentan: juegos de lotería, barcos, autos, etc.

Las etapas superiores están reservadas a los símbolos y a las operaciones.

En conclusión esas tendencias se pueden resumir así:

a) Se reconocen, en especial para las primeras etapas, las exigencias de John Dewey para la utilización de las operaciones de clasificación, de seriación, etc.

Esas actividades son, sin embargo, independientes unas de otras. Por eso la noción de número cardinal (que parece ser en general más importante) y la noción de número ordinal están recíprocamente aisladas.

b) La confianza en la construcción activa de las nociones no es completa: las manipulaciones concretas del niño sobre un material adecuado casi siempre son seguidas por el método gráfico e intuitivo.

c) El material propuesto, dado su carácter "eterno" que puede servir a los niños de varias generaciones, es simple y no más caro que un manual. Este último se introducirá progresivamente en función de la disminución de la utilización del material.

La inteligencia, según Piaget, cuyas teorías sirven de base a Hans Aebli, es un conocimiento que no prolonga el contacto perceptivo directo, sino que se apoya sobre operaciones derivadas de las acciones que transforman las configuraciones perceptivas. Esta concepción sicológica puede ser transformada, casi enteramente, en didáctica pedagógica (considerando únicamente las elaboraciones y la inteligencia pura) y es precisamente lo que Hans Aebli ha ensayado con su clase, trabajando según los principios modernos. Se trata pues de la demostración de una teoría explícita.

Es claro que tales ideas necesitan un comienzo, no por la intuición o la imagen, sino por las actividades propias del niño. Esas ideas prolongan las de Dewey y Decroly en

el dominio lógico y cualitativo primero (clasificaciones, seriaciones, correspondencias calificadas), en el dominio de la constitución simultáneamente del número (correspondencia unidad por unidad) y de la métrica espacial (medidas espontáneas) después, pero completándolas por un cuadro sistemático de las operaciones espontáneas en las diferentes etapas, fundado sobre los estudios géneticos del comienzo; por otra parte Piaget se niega a hacer derivar el número de la medida y admite dos construcciones paralelas e isomorfas, pero con un ligero retardo de la medida del contenido sobre la cuantificación de las cantidades discontínuas.

En el dominio del número los resultados sicológicos de Piaget han inspirado algunas realizaciones en la escuela maternal francesa (principalmente en Lyon y en Paris). Veamos un ejemplo tomado de las realizaciones de Mme. Dufresse, que propone dirigir los esfuerzos de la escuela maternal hacia la construcción del pensamiento lógico (y no súbitamente numérico): "Los ejercicios sensoriales e intuitivos, a los que las maestras de la escuela maternal dedican tantos cuidados, no bastan. Hay que agregar, aprovechando todas las circunstancias, ejercicios de seriación, de clasificación; habituar a los niños a establecer relaciones entre los objetos y la acción ejercida sobre ellos, adiestrarlos en la reversibilidad de esas relaciones, a sus conexiones, su coordinación, en una palabra, dar más movilidad a su pensamiento". (1).

El material disponible en las escuelas maternales está pues compuesto de objetos individuales, que se pueden clasificar o seriar de acuerdo a un determinado criterio elegido, poner en correspondencia uno por uno con varios etc. Las etapas de elaboración siguen siendo las mismas. El niño hace la experiencia de la conservación por una estructuración cualitativa. Comprueba la inclusión de las clases unas en otras, de las relaciones, descubriendo así la relación lógica de la parte al todo. En fin, el número se constituye por las correspondencias de unidad a unidad, las conservaciones cuantitativas y las equivalencias independientes de toda configuración perceptiva.

En el dominio de la geometría se puede citar la tentativa de H. Aebli de realizar en clase una verdadera escuela activa. Veamos como procede: "Después de haber resuelto el problema del perímetro del rectángulo (calcular la lon-

---

(1) Dufresse, M.: L'exposition du Congres de Lyon. 1949. En "Initiation au Calcul", editions Bourrelier, Paris, 1949.

gitud total de una empalizada alrededor de un jardín rectangular), nos preguntamos como se podría saber cual de los dos prados, de dimensiones diferentes, daría un mayor rendimiento de pasto. Los alumnos buscaron entonces un método que permitiese comparar las superficies de los dos prados. Comenzaron por recortar una tercera superficie. igual a una de las dos y trataron de que cubriera a la otra. Este término medio no permitía una medida exacta, porque sobrepasaba en parte a la superficie sobre la que estaba colocado; los alumnos idearon entonces recortarla en una serie de cuadrados: de ese modo descubrieron la unidad que sirve para medir las superficies" (1).

Mientras que Max Wertheimer y los "Gestaltístas" piensan que el comienzo de una estimación inteligente de la superficie de un rectángulo, consiste en estructurar interiormente la percepción de cuadrados pequeños, Hans Aebli sobre la base de la sicología de Piaget, permite alcanzar el mismo resultado por una manipulación concreta, pero que difiere del empirismo por cuanto la lectura de los resultados o la experiencia descanza, menos sobre las propiedades y el objeto que sobre los resultados de las acciones efectuadas. En efecto, el resultado de la experiencia se sistematiza no sólo gracias a la percepción, sino gracias a la actividad propia del niño que fracasa primero y que encuentra la equivalencia o la diferencia de dos rectángulos distintos por la iteración de una unidad (primero no convencional), iteración geométrica en este caso, que sólo tiene un sentido (para la comparación objetiva), si se mantiene independiente de los ajustes realizados en el interior de los límites dados. Esta comprobación realizada por los alumnos conduce lentamente a la noción de superficie y a la noción de multiplicación, tales como Max Wertheimer las introduciría, por la sola estructuración interior de los datos perceptivos. La noción de superficie y la noción de multiplicación están pues estrechamente ligadas: lo que importa es la conservación de la cantidad de elementos comunes entre superficies (los cuadrados cuyo lado es el máximo común divisor de los lados de varias superficies equivalentes). La noción es adquirida desde que todas las superficies pueden ser recubiertas por un número constante de superficies elementales, que son reconocidas como siendo equivalentes, independientemente de sus superficies diferentes. De este modo la superficie de

(1) Aebli, Hans: "Didactique psychologique".

un rectángulo se mantiene constante después de un nuevo ordenamiento de las superficies de los elementos. Supongamos que la superficie contiene 24 unidades ordenadas según las dimensiones 4 veces 6; el alumno puede combinarlas de otro modo, por ejemplo, según las dimensiones 3 veces 8 o 2 veces 12, etc. La elaboración inversa puede consistir en un cálculo de la base, si se dan la superficie y la altura, pero primero se realiza por la acción concreta. Estas operaciones concretas pueden ser interiorizadas progresivamente, pasando primero por el dibujo.

Así, según la sicología de Piaget, la representación pura, que se basa sobre la actividad concreta preliminar, es dinámica, mientras que el alumno trabaja sucesivamente sobre rectángulos distintos que no tienen relación entre si, de tal modo que la representación se mantiene estática y fijada sobre una sola percepción. Es por esto que la enseñanza tradicional se ha estereotipado tratando de imprimir imágenes en el espíritu del niño y desde que una demostración en el pizarrón se ha terminado, se aplican los nuevos conocimientos mediante los símbolos abstractos.

En la enseñanza de Aebli existe una relación real entre el perímetro y la superficie del rectángulo. Pero como "rectángulo" significa, para los alumnos, una multiplicidad de formas posibles, las fórmulas se han obtenido espontáneamente.

De ese modo Aebli ha tratado de llenar las lagunas de la escuela activa, haciendo la demostración didáctica del cálculo del perímetro y de la superficie del rectángulo, procediendo por una comparación entre dos clases, una tradicional y otra "moderna". Cada clase recibió una serie de lecciones. Antes y después de esta enseñanza Aebli midió tanto la aptitud como el rendimiento.

El método tradicional descansaba estrictamente sobre el método intuitivo: utilización de croquis realizados en el pizarrón. "Por medio de una mayéutica severa, dirigimos estrictamente el razonamiento de la clase. Introducimos primero el perímetro del rectángulo, lo que era sin duda justo, pero pasando luego a la medida de las superficies, comenzamos por la definición de las unidades de las medidas de superficie ("el centímetro cuadrado es un cuadrado de un centímetro de lado", etc.), sin ejecutar efectivamente las mediciones".

El método moderno consistía precisamente en una heurística verdadera: todo estaba basado sobre la búsqueda personal del niño, ejecutada individualmente o por equipos, o colectivamente por discusiones en común. "Esta búsqueda

siempre estaba orientada por un problema significativo; el maestro sólo intervenía cuando los alumnos no podían seguir adelante y, naturalmente, en el curso del ejercicio de las operaciones".

La prueba de rendimiento final de Aebli, comparando el rendimiento del grupo tradicional con el del grupo "moderno'' muestra que, para los alumnos menos dotados, el
derno" muestra que, para los alumnos menos dotados, el Porcentaje de las operaciones confundidas es de 37, 3 o|o para el grupo tradicional y de 7 o|o solamente para el grupo moderno, mientras que el porcentaje de las soluciones justas es de 53, 2 o|o para el grupo tradicional y de 93 o|o para el grupo "moderno". Para los alumnos mejor dotados la diferencia de los resultados es insignificante. Estos resultados son alentadores, pero no hay que sobreestimarlos, porque la experiencia sólo duró algunas horas. Sin embargo, indican una tendencia netamente en favor de una enseñanza activa en la que las construcciones operatorias conducen a aplicaciones más seguras y más sólidas.

Al comparar, en conclusión, las tendencias históricas con el estado actual de la enseñanza matemática por la escuela activa, casi no se constata una mejora sensible. En otro tiempo, al comienzo de las reformas escolares, los educadores han hablado de la espontaneidad necesaria de los niños para alcanzar los fines intelectuales y han puesto en evidencia la liberación del niño. Actualmente, en una sociedad más evolucionada, se busca sobre todo la formación de ciudadanos útiles: la espontaneidad tiene una parte intrínseca como creación y la liberación conoce límites impuestos por el grupo social en el que vive. La interpretación de los procesos y las técnicas modernas en la escuela es más profunda y más eficaz, más sistemática y por consecuencia más científica. Varios educadores, que se dan cuenta del estado estacionario de las cosas, se dedican a nuevas investigaciones en el campo de la pedagogía y de la sicología del niño, para tratar de verificar ciertas soluciones intuitivas inherentes al trabajo escolar y para mejorar su enseñanza.

El ejemplo de Hans Aebli, ya citado, constituye una ilustración: descubrió en Piaget el mecanismo de las operaciones que necesitan una actividad real preliminar de parte de los niños, la que tiene estructuras bien definidas. El ejemplo muestra cuán importante es profundizar el estudio de los mecanismos de las operaciones intelectuales en el niño, si no se quiere perjudicar el principio de la espontaneidad creadora de la pedagogía moderna.

PARTE SICOLOGICA

La clasificación de los sistemas didácticos, sobre la que nos hemos basado en la parte pedagógica, nada tiene de absoluto ni de definitivo. Nos hemos visto obligados a introducir un capítulo sobre la enseñanza verbal, otro sobre la enseñanza gráfica e intuitiva y otro, en fin, sobre la escuela activa, estudiando los hilos conductores de las grandes tendencias de la didáctica matemática en la escuela primaria. Mediante un estudio histórico hemos podido desarrollar los tres sistemas didácticos mencionados. Por eso esa clasificación sólo es una indicación de la similitud entre los distintos sistemas y por lo tanto tiene algo de esquemática. Es así que, por ejemplo, si Montessori preconiza en general un sistema de enseñanza gráfico e intuitivo, le agrega un elemento activo por la manipulación concreta de un material didáctico. Por el contrario Decroly, si bien recomienda la escuela activa, nunca se ha separado enteramente de las representaciones intuitivas en la escuela.

Mientras Montessori se mantiene apegada a la enseñanza gráfica e intuitiva, Decroly se basa casi exclusivamente sobre los principios de la escuela activa. Es en este aspecto y con estas reservas que hemos introducido nuestra clasificación de los sistemas didácticos y mantendremos el mismo orden en esta parte sicológica, conscientes de las interacciones de los diferentes sistemas.

Cada sistema didáctico implica una concepción sicológica y epistemológica, aun cuando no haya sido explicada por los distintos autores; ambas reposan, al fin de cuentas, sobre una concepción genética, ya que ambas implican una interpretación de los mecanismos mentales que están actuando para adquirir tal o cual conocimiento en el curso del desarrollo.

Por desdicha , faltan a menudo las bases teóricas de los sistemas didácticos expuestos en la primera parte, si eso no ocurriera, nuestro trabajo sería superfluo. Si los distintos autores tienen una concepción más o menos vaga, o más o menos precisa, del proceso del conocimiento, del desarrollo de éste y de los mecanismos mentales correspondientes, nuestra labor será la de explicar esos fundamentos para poder compararlos utilmente y sobre todo para poder avaluarlos tomando como criterio decisivo los datos del desarrollo sicogenético. Para mantener el paralelismo de las ideas, mantendremos la clasificación de los sistemas didácticos introducida en la primera parte.

IV. La Sicología de la Enseñanza Verbal

La enseñanza verbal está basada en un simbolismo: ante todo sobre el lenguaje, luego sobre cualquier otro simbolismo convencional, como por ejemplo los símbolos matemáticos. Estos símbolos se han trasmitido de una generación a otra, de las sociedades antiguas a las contemporáneas. Todos los enunciados actuales derivan de las lenguas anteriores. Es así que la noción de número del siglo veinte es el resultado de una larga elaboración histórica cuya sociogénesis puede ser trazada. La idea de número está precedida de la noción de pluralidad como noción global. Esa pluralidad es solidaria de los objetos a los cuales se aplica. Se pasa de la pluralidad al número por la operación de la correspondencia de término a término y en fin se asiste al pasaje del número concreto (vinculado a los objetos considerados) al número abstracto (válido para comparar a la vez varias colecciones). También es posible distinguir aquí una lenta evolución del número entero, de las fracciones, de los números negativos, etc. En fin el simbolismo matemático ha introducido diversos negativos de numeración, estableciendo escalas de signos abreviativos y convencionales. Es así que nosotros utilizamos actualmente el sistema decimal, al que muchas personas consideran, equivocadamente, como el único sistema numérico y el más natural.

Louis-Gustave Du Pasquier emprendió un estudio sobre los distintos sistemas numéricos, su extensión, sus ventajas y sus desventajas. Actualmente el sistema decimal es el más extendido. En un total de 381 idiomas estudiados por el autor 184 tienen una numeración decimal. (1)

Si el sistema decimal parece basarse sobre el número de los dedos, el sistema quinario basado en el cinco se debe a la costumbre que tienen los primitivos de servirse de una sola mano. El sistema vicesimario, basado en el veinte se debería a la costumbre de los primitivos de ayudarse con los dedos de las manos y de los pies. El sistema duodecimal, basado en el doce, ha suscitado siempre un interés particular por razones de divisibilidad. Además, en las distintas lenguas, este sistema es todavía utilzado para ciertas medidas, en particular en astronomía. También se encuentra el

(1) Du Pasquier, Louis-Gustave: "Le développement de la notion de nombre". Memoire de l'Université de Neuchatel, tome III, chap. VII. Attinger Freres. Neuchatel.

sistema duodecimal entre los comerciantes y en los pesos y monedas de un gran número de pueblos. La numeración basada en el cuatro constituye el sistema cuaternario o tetrádico. Du Pasquier cree, que se podría utilizar, en francés, todos los nombres de las cifras 1 a 16, dada su simplicidad y tomar el 16 como base de un sistema sexadecimal. En todo caso se sabe que el número cuatro representa un papel preponderante en la práctica, sobre todo en el comercio.

En cuanto al sistema binario la base, expresada en el sistema decimal, es 2. Sólo se tendrá necesidad de dos símbolos: 0 y 1. El inconveniente de un sistema como este es la longitud extremada los números. Así el número 111111 en el sistema binario, significaría 63 en el sistema decimal. A pesar de sus complicaciones aparentes este sistema ha encontrado una amplia aplicación en las ciencias modernas y en particular en la cibernética.

Si hay incontestablemente trasmisión de conceptos de una generación a otra, ellos pueden cambiar de significado en función de las estructuras integrantes de las que a cada instante forman parte. Pero tanto los teóricos como los pedagogos, al aplicar la enseñanza verbal, no se han preocupado suficientemente de la evolución de esa estructuración, cuyo estudio permitiría darse cuenta de las tendencias de los significados y de su valor actual en función de una marcha eventual hacia un equilibrio creciente.

El papel de esas trasmisiones sociales consiste precisamente en dar a los jóvenes el respecto de las reglas establecidas. Es así como el individuo sufre la presión del medio y debe someterse a las reglas de la colectividad: de esta manera adquiere las normas dadas por el medio.

Esa actitud desdeña toda elaboración personal y mantiene un tradicionalismo que llega amenudo hasta impedir el progreso. El respeto de las normas en general y de todo lo relacionado con las cifras, ha llegado amenudo tan lejos que las matemáticas se han convertido para muchos en una ciencia para "iniciados", reservada para un pequeño número de personas a las que se considera especialmente dotadas. A menudo, los matemáticos son considerados por aquellos que los rodean como seres humanos que viven fuera de la realidad y que tienen dotes para el pensamiento abstracto. Esto produce, tanto en los alumnos como en muchos adultos, ciertos obstáculos injustificados frente a una ciencia que, a decir verdad, influye en tantos dominios de nuestra vida diaria.

La trasmisión verbal está basada esencialmente sobre el lenguaje. Desde que se trata de explicaciones matemáti-

cas ese lenguaje debe obedecer a ciertas leyes lógicas, de donde surge una serie de relaciones entre la lógica y el lenguaje por una y la lógica y las matemáticas por la otra. Es así como el lenguaje representa el papel de vínculo entre la lógica y las matemáticas, pudiendo estas ser reducidas a la lógica o viceversa.

Todo enunciado es no sólo un derivado de lenguas anteriores, sino que es también el símbolo de un hecho o de un acontecimiento. Dicho de otro modo: todo enunciado es el sustituto de un hecho y puesto que existe similitud entre el enunciado y el hecho, esa sustitución reviste un carácter particularmente simple. Si el hecho es exacto el enunciado también lo será. Entonces la enseñanza verbal parece justificada. Sólo hay que buscar las reglas a las que están sometidos esos enunciados para hacer intervenir consideraciones lógicas. Por lo tanto, el lenguaje común y espontáneo de los niños debe someterse, poco a poco a esas reglas, lo que exige una instrucción que conduzca a la precisión de los enunciados utilizados, así como a sus combinaciones posibles.

El problema es entonces examinar la exactitud de los enunciados propuestos. Además se puede examinar los enunciados del punto de vista de su certidumbre, de su verosimilitud, etc.

La enseñanza verbal ha reducido, esencialmente, el razonamiento a la lógica: es manipulando bien el simbolismo que se le ofrece, que el niño puede comprender las nociones. Ese formalismo arriesga perder todo contacto con la realidad, como lo demuestran los ejemplos citados en la parte pedagógica.

Ahora bien ¿existen enunciados basados en hechos descomponibles en otros hechos? Si tal fuese el caso se podría encontrar un conjunto de proposiciones elementales que formasen, cada una, hechos individuales irreductibles, sobre los cuales se construiría un edificio lógico. El razonamiento consistiría entonces en deducciones a partir de esas proposiciones irreductibles, parecidas a los axiomas matemáticos. Pero siempre será difícil juzgar cuáles son las proposiciones "atomicas". De ese modo se puede distinguir, en toda proposición lógica, la forma y el contenido. Piaget llama contenido a "los datos o los términos que pueden sustituirlo, mientras que la forma es lo que se mantiene incambiado en el curso de tales sustituciones" (1). Esto permite establecer un conjunto de

---

(1) Piaget, Jean: "Traité de logique". Librairie Armand Colin. Paris 1949.

vinculos, sin límite "inferior" o "superior", que se puede llamar "estructura". La estructura está basada sobre las transformaciones, sobre las operaciones, y no sobre los hechos.

¿Reposa entonces el razonamiento sobre una pura combinación formal de los juicios? Piaget establece con precisión que "la lógica es la axiomática de las estructuras operatorias, cuyo funcionamiento real estudia la sicología del pensamiento". Esta es precisamente la objeción que se le puede hacer a la enseñanza formal: que parte de una axiomática que no existe y que el niño debe buscar por su propia experiencia y sus manipulaciones.

V. La Sicología de la Enseñanza Gráfica e Intuitiva

1. *La sicología de las concepciones antiguas*

Los precursores de la enseñanza gráfica e intuitiva, Lay Kühnel y Montessori han defendido conceptos que han sido sobrepasados, en gran parte, por las investigaciones modernas.

"Lay concibe la formación del conocimiento esencialmente de acuerdo al esquema de la filosofía y de la sicología sensualista-empirista. El primer eslabón de toda reacción conocitiva o motriz es, para él, una impresión, una excitación sensorial, mediante la cual se recibe un dato del exterior" (1)

Estos procesos sensoriales corresponden ante todo a un algo pasivo, es decir, que la impresión es sólo receptiva, dando "representaciones intuitivas", las que tendrían su expresión en una actividad. Entre ambas, a título de vínculo, interviene la "asimilación reflexiva" y el principio de Lay consiste siempre en hacer seguir la impresión y la asimilación por la expresión. Lay no considera únicamente a los sentidos como recorriendo los objetos y proporcionando la impresión, sino que agrega como "actividad real" las actividades no operatorias pero perceptivas o sensorio-motoras; por ejemplo: las exploraciones tactiles que ponen en evidencia los movimientos musculares y que no deben confundirse con la impresionabilidad tactil, que sólo pone en evi-

---

(1) Aebli, Hans: "Didactique psychologique". Application à la didactique de la psychologie de Jean Piaget. Delachaux et Niestlé. Neuchatel/Paris, 1951.

dencia el acto de tocar. Es así como para Lay la exploración se hace más viva, no sólo al tocar los objetos, sino siguiendo también sus contornos y superficies con la mano o los dedos. Según Lay estas son las "sensaciones que crean imágenes vinculadas por asociaciones de similtud, de contraste, etc". (Aebli, Hans: of. cit).

En cuanto a la expresión es la aplicación, en la realidad, de la impresión que el sujeto ha recibido del exterior. "Es así que los actos vitales están caracterizados por "la unidad de la impresión y de la reacción" (expresión que permite al sujeto adaptar el medio a sus necesidades o adaptarse él mismo".

Al reproducir (por la expresión verbal o por el dibujo) una impresión (por ejemplo la percepción) nosotros la hacemos más precisa. De este modo a la observación directa sucede una elaboración por el pensamiento (asimilación) y la expresión. Para Lay el dibujo es la reproducción de los movimientos de exploración espacial anterior.

La exploración tactil caracteriza igualmente la didáctica de María Montessori. El niño tiende a disciplinar el conjunto de sus movimientos y regula el libre juego de sus músculos. Según Montessori, el desarrollo síquico se explicaría por una necesidad íntima de conocer y por vinculaciones extrínsecas entre los elementos representados por el material educativo puesto a su disposición. El espíritu no está solamente dotado de una fuerza independiente, caracterizada por un poder creador puramente intrínseco. Su pedagogía ha querido justamente probar la interdependencia entre el objeto y el pensamiento.

La disposición de un material provoca ante todo, una actividad tanteadora que tiende a vincularse con los campos organizados, que ya están presentes en el espíritu: "El niño, cuando se lo deja actuar libremente, debe encontrar en el ambiente alguna cosa **organizada** que está en relación directa con su **organización** interior, que se desarrolla siguiendo sus leyes naturales". Es en este sentido que Montessori concibe la inteligencia, es decir, la inteligencia es "el conjunto de las actividades reflejas y asociativas que le permiten al espíritu edificarse poniéndose en relación con el ambiente", lo que supone la existencia de una correspondencia entre lo organizado y la organización, entre el espíritu y el ambiente creado por el material didáctico. Las ideas de Montessori implican así una especie de isomorfismo entre la realidad física y las estructuras mentales. Sin embargo, sólo preconiza una estructura determinada y única por noción y limita así la enseñanza por la idea de

que las nociones se elaboran siempre según las mismas estructuraciones, de acuerdo a un material único. Reconoce que cada alumno debe proporcionar un esfuerzo personal. pero estos esfuerzos individuales están dirigidos colectivamente en una dirección preestablecida para todos de la misma manera. Las nociones están vinculadas entre sí. La didáctica tiene por fin facilitar toda comprensión: "se puede decir que ayudar al desarrollo de la inteligencia es ayudar a ordenar las imágenes de la conciencia". Por otra parte, para Montessori, toda comprensión es considerada como esencialmente activa y constituye una especie de acontecimiento interior.

Entre los tres precursores sólo Kühnel defiende un punto de vista genético, aunque no muy preciso. Al examinar a los niños Kühnel pudo observar, en lo concerniente a la formación de la noción de número, las siguientes etapas: El niño de 2 a 3 años sólo conoce cantidades indefinidas, mientras que el niño entre 4 y 6 años adquiere nociones bien definidas de los números 1, 2, 3 y 4, sin darse cuenta, sin embargo, de una ley de generación, por ejemplo, por la iteración de la unidad. De los 6 a los 7 años el niño establece la serie y asocia así sus primeras nociones de cardinación o las nociones de ordenación (seriación). Es solamente entre los 8 y 9 años que el niño se inicia en el sistema numérico y más tarde aún, desde los 10 años, en las fracciones ordinarias y decimales.

Los mecanismos mentales que se ponen a contribución para la elaboración de las nociones de las matemáticas elementales, no están descriptos explícitamente por Lay, Kühnel y Montessori. Sin embargo, se basan sobre las estructuras perceptivas o físicas, que son exploradas más o menos activamente. Lay sólo pide a sus alumnos una imitación por el movimiento de las estructuras perceptivas. Kühnel compone las estructuras perceptivas únicas por medio de objetos concretos y limita así las evidencias, las identidades, etc. Montessori sólo permite la exploración activa por la libre manipulación de un material didáctico, pero limitado por estructuras físicas únicas e impidiendo, así mismo, las equivalencias, identidades, etc. de las estructuras. Para los tres autores la noción de número se mantiene independiente de la operación: de este modo la noción se mantiene estática y las distintas nociones se vinculan después por las operaciones; las nociones no son construídas sino simplemente percibidas. El número parece ser, para estos autores, una noción primera y no una síntesis de operaciones lógicas.

Lay y Kühnel pretenden que el niño elabora ante todo la noción de número cardinal que, más tarde, asocia a la noción de número cardinal. Es así que existirían varias nociones de número cardinal sin noción de orden. Esto es difícil de concebir, puesto que hay que distinguir los números cardinales precisamente por su seriación, para poder constatar sus diferencias sucesivas equivalentes de la unidad. Por el contrario, Montessori introduce la única noción de número ordinal por la seriación de longitudes con diferencias sucesivas equivalentes. Esto es también difícil de admitir porque la seriación implica la noción cardinal, de tal modo que los números cardinales y ordinales son indisociables en el final.

Paralelamente a las primeras realizaciones de la enseñanza gráfica e intuitiva, los sicólogos han organizado investigaciones para verificar y para sistematizar ciertas afirmaciones de los pedagogos. Quisieron saber qué es lo que puede adquirir un niño, cualesquiera sean las condiciones escolares aun independientemente de toda escolaridad, a fin de permitir una mejor adaptación de la enseñanza a los datos de la sicología.

Estas primeras investigaciones sicológicas se hicieron por medio de tests, es decir, sólo por las medidas de rendimiento. Este método casi no permite —en su forma más simple— reconocer las operaciones sicológicas que intervienen para alcanzar el fin propuesto. Por el contrario, por la comparación de los resultados, expresados por simples números, se pueden estudiar los rendimientos en función de la edad cronológica, examinando las diferencias observadas. El método de los tests sólo encara indirectamente el complejo problema de la didáctica pedagógica. No se preocupa de las operaciones intrínsecas de las preguntas planteadas y en cambio estudia la sucesión genética de las adquisiciones, de las nociones, de las aptitudes; de este modo muestra la progresión de las materias a enseñar con éxito, influyendo en los programas escolares.

Nosotros hemos elegido dos autores que nos parece que han presentado trabajos sistemáticos referentes a nuestras preocupaciones. Uno es Alice Descoeudres, que ha estudiado la noción de número en el niño antes de la edad escolar; el otro, Ada R. Polkinghorne, ha estudiado las primeras nociones de las fracciones justo antes de la entrada a la escuela y durante los primeros años de la escuela primaria.

Estas pruebas pueden ser reveladoras de una concepción del número que lleva a encarar, de manera independiente, la cardinación y la ordenación.

Teniendo en cuenta las observaciones sistemáticas de Decroly sobre su hija, con ayuda de esquemas gráficos, Descoeudres organizó una gran encuesta para establecer las etapas de la evolución de la noción de número en el niño. Es así como comprobó que las interrogaciones y las investigaciones eran posibles desde la edad de dos años y medio. Esto es porque todas las indicaciones sobre la construcción de nociones en el infante, no pueden ser estudiadas sino sobre la base de observaciones de la expresión espontánea de sus movimientos.

Descoeudres, aceptando los principios de la intuición gráfica, ha estudiado las primeras nociones de número en el niño basándose sobre una serie de tests, presentando cada uno de ellos el mismo problema bajo forma diferente. Se trata de establecer correspondencias bi-unívocas entre objetos o entre los objetos y los dedos, de reproducir una percepción auditiva rítmica y de indicar verbalmente las percepciones auditivas y visuales, los números de 1 a 10, enumerar objetos con los dedos, jugar con una lotería encontrando las estructuras perceptivas idénticas o reconociendo el mismo número de objetos.

En conclusión encuentra los siguientes resultados:

El número 1 se adquiere a los 2 años y medio.

El número 2 se adquiere a los 3 años.

El número 3 se adquiere a los 4 años.

El número 4 se adquiere a los 5 años.

Finalmente comprueba que

1.o Son los más instructivos para analizar, disecar la noción de número.

2.o Estos estudios son interesantes porque vienen a confirmar y aclarar los pocos datos que poseemos sobre las nociones de número entre los pueblos primitivos.

3.o Hay pocos estudios que sean tan apropiados como estos para hacernos penetrar en el pensamiento del niño.

4.o Las experiencias han permitido establecer el límite de los conocimientos para cada edad y para cada una de las formas de la noción de número.

5.o En fin, desde el punto de vista pedagógico, se puede concebir la utilidad de esas pruebas para basar la enseñanza sobre el conocimiento del niño. (1)

Estas investigaciones emprendidas por Descoeudres, sobre la base de las observaciones sistemáticas de Decroly, sólo nos informan sobre ciertos conocimientos, sin estudiar la comprensión verdadera y el mecanismo de su adquisición. De este modo alcanzamos las bases de la enseñanza aritmética de Lay y de Kühnel, para quienes la construcción del número se debe al hecho de tener conciencia de una estructura perceptiva. "Lo que ocurre en fotografía es verdad también para nuestras representaciones: primero la imagen real está en relación estrecha con la imagen formada sobre la placa; pero, luego que los rayos han actuado sobre esta última, la imagen del objeto subsiste mientras que el objeto mismo ha desaparecido". (2)

Descoeudres se basa, parcialmente, en lo relativo a las pruebas de percepción visual, sobre lo que criticó Katz, es decir, la distribución de los objetos en líneas (rectas). Recién en el último test (el onceno) propone poner en evidencia varias estructuras perceptivas equivalentes. Pero todas las pruebas se parecen (salvo dos o tres puramente verbales), por el estudio del número cardinal como cosa distinta del número ordinal; este último no es directamente estudiado, salvo, como en Wittmann, por la seriación de las potencias de los conjuntos estudiados. Por lo tanto sería interesante compararlo con una investigación parecida sobre las fracciones.

Los niños del primer año escolar ¿tienen nociones sobre los valores numéricos de las fracciones? Si las tienen ¿cuáles son? Esto es lo que se ha preguntado Ada R. Polkinghorne de Chicago. Estudió en 266 niños de clase jardinera y de los tres primeros años de escuela (por lo tanto hasta los 10 años), el desarrollo de la noción de fracción, tratando de averiguar:

a) Los niños de escuela primaria ¿poseen ya ciertas nociones de fracciones?
b) Si las tienen ¿cuáles son?
c) ¿Cuándo adquieren los conceptos de fracciones?
d) ¿Cómo los adquieren?

---

(1) Descoeudres, Alice: "Le developpement de l'enfant de deux a sept ans". Delachaux et Niestlé, Neuchatel/Paris, 1946.

(2) Descoeudres, Alice: "L'education des enfants arriérés". Delachaux et Niestlé, Neuchatel/Paris, 1932.

Todas las pruebas se efectuaron antes que se hubiese realizado una enseñanza sobre las fracciones. Por lo tanto, el estudio representa también una investigación del rendimiento, sin ninguna interpretación sicológica.

Los tests fueron preparados de tal manera que las comprobaciones recayeran esencialmente sobre la extensión de las fracciones: las preguntas se hicieron sobre las fracciones unitarias como 1|2 o 1|4, etc., de un solo objeto o sobre divisiones ocultas en las fracciones, tales como 1|4 de 4 o de 8 objetos, después sobre fracciones más generales, pero no fracciones unitarias como 3|4 del todo o 3|4 de 4 objetos (división simple). En fin, Polkinghorne realizó preguntas sobre fracciones impropias, sobre la identificación de fracciones y sobre las fracciones equivalentes. En cada prueba había una posibilidad de expresión objetiva (extensiva) o de expresión numérica. Por ejemplo: se le dió al niño un cuadrado de papel y un par de tijeras rogándole que entregara al experimentador la mitad del cuadrado. Luego se hizo lo contrario mostrando al niño un cuadrado ya cortado en dos mitades y se le rogó que entregase las partes que constituían ese entero.

Todos los tests se componían de varios ejercicios. De ese modo los niños tuvieron la posibilidad de demostrar si conocían algo de lo que se les preguntaba. Cada niño tenía 42 posibilidades de responder objetivamente (por extensión o numéricamente). La primera serie de preguntas era tan fácil que prácticamente todos podían responder.

Veamos, como ejemplo, una serie de preguntas:

a) 1|2 de 2: el experimentador coloca dos lápices sobre la mesa y dice: 'Aquí hay varios lápices ¿puedes darme la mitad?"

b) 1|2 de 4: el experimentador coloca 4 monedas en fila y dice: "Aquí hay algunas monedas. Voy a tomar algunas. (El experimentador toma una) ¿He tomado la mitad, el cuarto o el tercio de estas monedas?"

c) Un objeto es la mitad de otro. Se coloca un papel blanco ante el sujeto y se dice: Voy a dibujar una línea (el experimentador traza una recta de unos 15 cm. de longitud). ¿Puedes ahora dibujar una línea que tenga la mitad de la longitud de la mía?"

d) Un objeto es la tercera parte de otro. Se da al sujeto dos barritas de azúcar cande. Una de ellas es la tercera parte de la otra. Luego se dice: "Aquí tienes dos barritas de azúcar cande. ¿La pequeña es la mitad, la tercera o la cuarta parte de la longitud de la grande?

e) Dos objetos son la mitad de otros objetos. Se muestra al niño un grabado con cuatro manzanas coloreadas en fila. "Aquí hay varias manzanas. ¿Quieres dibujarme la mitad de las manzanas que he dibujado?"

f) Tres cuartos de un solo objeto. Se la da al niño un papel con la imagen de un vaso. "¿Ves este vaso? ¿puedes colorear los tres cuartos de tal modo que se vea que el vaso está lleno hasta los tres cuartos?"

g) Tres cuartos de cuatro objetos. Se da al niño un papel donde se ha dibujado una fila de cuatro círculos. "Aquí hay varias bolitas. ¿Puedes colorear los tres cuartos?"

h) Por fin se hacen preguntas:

"¿Sabes cuántas mitades contiene un entero?"

"¿Sabes cuántos tercios contiene un entero?"

"¿Sabes cuántos cuartos contiene un entero?"

i) Y para terminar se pregunta:

"¿Quieres decirme lo que corresponde a tres mitades, cuatro mitades, cuatro tercios, cinco cuartos, siete séptimos?"

Cuando se procede así el conjunto de las pruebas está ordenado de acuerdo con las dificultades crecientes, mientras que no existe ningún orden particular entre la serie de preguntas de un test.

Cada respuesta, verdadera o falsa, se avalúa así: si la respuesta de un niño es correcta y la demostración exacta, o por lo menos si sabe explicar oralmente porqué tiene razón y que la solución es justa, la respuesta es valorada como exacta. Por el contrario si el niño hace una estimación sin dar una explicación correcta de su conducta, se le pregunta que explique como sabe, por ejemplo, que el vaso está lleno hasta los tres cuartos, etc. Si la explicación es satisfactoria, toda la respuesta es valorizada como exacta. En todas las respuestas se trata de dar una aproximación por extensión y no necesariamente de los valores numéricamente exactos.

Por término medio, los niños de jardinera sólo responden correctamente a 4.9 preguntas sobre 42 (11,7 o|o), los de primer año (entre 6 y 7 años) dan 6 respuestas exactas sobre 42 (14,3 o|o), los de segundo año (entre 7 y 8 años) 11 sobre 42 (26 o|o) y los de tercer año (entre 8 y 9 años) 20,3 sobre 42 (48,3 o|o).

Veamos en el cuadro siguiente algunos de los resultados obtenidos por Polkinghorne:

Concepts testés	Nombre de réponses	% de la totalité des réponses	Nombre des réponses satis-faisantes	% des réponses satis-faisantes
Fractions unitaires $\frac{1}{x}$	3 968	43	2 117	53
Fractions quelconques simples non-unitaires $\frac{x}{y}$ où $x < y$	2 197	24	394	18
Fractions impropres $\frac{x}{y}$ où $x > y$.	1 512	17	135	8
Identifications de fractions . $\frac{x}{x} = 1$	1 134	12	99	8
Equivalences de fractions : $\frac{z}{y} = c + \frac{x}{y}$ ou $z > y$ et $x < y$	387	4	1	0
Total . . .	9 198	100	2 746	100

Es así como podemos deducir que los niños tienen más facilidad para la comprensión de las fracciones unitarias que para las demás; que comprenden algo de las fracciones ordinarias no unitarias y que muy pocos niños tienen una noción de identificación de las fracciones (es decir, reconocer la igualdad x|x igual 1) y que reconocen aún menos equivalencias tales como z|y igual c más x|y o z>y y x<y.

Además esta serie de pruebas ha demostrado que los niños conocen mejor ciertas fracciones que otras. Así se puede comprobar que los niños aprenden las fracciones espontáneamente en el orden siguiente:

1|2, 1|4, 2|4, 1|3, 3|4, 2|3, 4|3, 3|2, 3|5, 7|5, 5|4, 2|5

En fin Polkinghorne resume otros resultados en la siguiente forma:

a) Los niños reconocen mejor una fracción unitaria aplicada a un solo objeto, por ejemplo 1|2 de 1, etc.

b) Conocen una fracción unitaria utilizada comparativamente a dos objetos, por ejemplo: "¿es 1|2 del tamaño de esto?"

c) Los niños conocen menos bien la fracción unitaria aplicada a un grupo de objetos. Por ejemplo 1|2 de 1 es más fácil que 1|2 de 4.

d) Pueden utilizar mejor las fracciones comparando dos objetos que comparando dos grupos de objetos. Por ejemplo, "esto es 1|2 de esto" es más fácil que "3 es 1|2 de 6", etc.

La clasificación de las respuestas según las edades es particularmente importante para nosotros. Según las estadísticas de Polkinghorne —que son bastante difíciles de interpretar a causa de su falta de homogeneidad y de la insuficiencia de las explicaciones que están a nuestra disposición— se comprueba, sumariamente, lo siguiente:

Entre 4 y 6 años los niños sólo tienen una idea vaga de las fracciones unitarias:

Entre 6 y 7 años los niños comienzan a tener la noción de las fracciones unitarias y a comprender algunas fracciones simples no unitarias;

Entre 7 y 8 años amplían sus conocimientos sobre estos dos puntos y comienzan a poder identificar algunas fracciones;

Entre 8 y 9 años, mientras esas nociones se amplían aún más, los niños ignoran, sin embargo, prácticamente la equivalencia de las fracciones.

Las dos investigaciones, de Alice Descoeudres para los números enteros y de Ada R. Polkinghorne para los números racionales, se parecen precisamente en su concepción común respecto a la coordinación y a la ordenación. Para ambas la ordenación es consecuencia de la cardinación, sin que exista de inmediato un vínculo entre las dos. En la investigación de Descoeudres es la comparación de las potencias la que lleva a la ordenación y habría, como para Wittmann, primero la noción del número cardinal y sólo después la noción del número ordinal.

En cuanto al estudio de Polkinghorne sobre los números racionales, sólo existe la cardinación sin intervención ninguna de la ordenación, pero esto se justificaría si la noción de fracción es considerada independientemente del sistema de números enteros, ya que toda parte de un entero, (de un todo, de un objeto) es independiente de todo orden en el interior de ese entero. Un cuarto sigue siendo un cuarto, independientemente de su emplazamiento, es decir, que es inútil precisar si es el "primer" o el "tercer" cuarto, por ejemplo.

Por lo tanto desde el punto de vista matemático, el aislamiento de la cardinación para las nociones de fracción está justificado bajo la condición de que esas fracciones no estén vinculadas al sistema numérico habitual. Este está precisamente caracterizado por la simultaneidad de la cardinación y de la ordenación, pues todo número significa a la vez una simple cantidad (potencia del conjunto) y un lugar en la serie de los números.

Es así que, a pesar de su apariencia, ambas investiga-

ciones tienen un significado bien distinto. Del punto de vista de la enseñanza gráfica e intuitiva y según las teorías discutidas anteriormente, se podría retener esto: la noción del número entero que se basa esencialmente sobre la cardinación no tendría necesidad sino de una sola imagen, es decir, de una sola estructura perceptiva: si Wittmann y Descoeudres (último test) introducen, a pesar de esto, estructuras diferentes, lo hacen esencialmente para acercarse más a la realidad de la enseñanza y sólo secundariamente para liberar al niño de las percepciones mismas, ya que éstas siguen siendo, bajo formas más móviles, la base de toda comprensión. Por el contrario la noción de fracción, siendo en un principio independiente de la ordenación, debe necesariamente liberarse de una estructura perceptiva particular ya que el orden no está preconcebido.

Lo que caracteriza las dos investigaciones es que las nociones se formarían aislada e independientemente una de la otra; no habría ninguna ley de generación de los números (o de las fracciones), por ejemplo por iteración de la unidad. Una de las pruebas es precisamente la dada por los trabajos de Polkinghorne, quien estudia la noción de fracción únicamente desde el ángulo de la cardinación, lo que impide la vinculación con el sistema numérico.

Al considerar solamente el número cardinal los autores no proscriben la idea operatoria en matemáticas. Consideran que los números son engendrados cada uno por si, de acuerdo con el estudio de clases de conjuntos independientes entre sí. Un objeto cualquiera o un punto en una gráfica sólo se refieren al número uno, si es un elemento de una operación que lo compara con dos o más objetos parecidos o a dos o más puntos en una gráfica. Es precisamente esa unidad que es iterable. Por el contrario, el objeto considerado o el punto en la gráfica se mantiene independiente del número si el sistema operatorio estudia sólo las relaciones entre objetos parecidos. La noción de número depende pues, no de la naturaleza de los objetos manipulables o de la situación de los puntos en un gráfico, sino de la operación que relaciona a los elementos.

Ahora bien, la noción cardinal del número no existe por sí sola ya que omite ordenar el sistema numérico. La cardinación sólo es la reunión de elementos idénticos. Todo número finito es en realidad tanto una expresión cardinal como ordinal. Al introducir sólo una de las dos se niega la naturaleza operatoria del número, es decir, la posibilidad de asimilarlo por una construcción verdadera.

La coexistencia de la cardinación y de la ordenación

implica una doble abstracción: el niño puede formar los conjuntos agrupando los objetos según su parecido y haciendo abstracción de sus diferencias; pero puede ordenar los objetos teniendo en cuenta las diferencias y haciendo abstracción de los parecidos. La reunión de objetos parecidos lleva precisamente a la noción de número cardinal, pero ésta no puede existir sino en función de la noción de número ordinal, que se desarrolla por la ordenación de las diferencias observadas. En conclusión, de esos estudios se puede retener lo siguiente: el niño asimila desde antes de la escolaridad obligatoria algunas nociones de números cardinales, y asimila también, mucho antes de la enseñanza sistemática correspondiente, las primeras nociones de fracción desde el ángulo de la cardinación. Los estudios no responden, por lo menos explícitamente, a los problemas de la noción de la ordenación.

2. — *La sicología de las concepciones modernas*

Si la enseñanza gráfica e intuitiva moderna se ha alejado de las representaciones gráficas de modelo único, ha sido gracias a dos tendencias sicológicas:

1) El estudio genético de la adquisición de las nociones por los niños ha demostrado que las estructuras perceptivas cambian de significación durante el desarrollo; sirven de soporte al razonamiento de los pequeños o provocan una simple intuición y, para los de más edad, sirven también para realizar las equivalencias y las reestructuraciones sucesivas. De ese modo su función varía durante el crecimiento mental. Los primeros estudios sicológicos para reconocer esa evolución, como los que hemos citado (Descoeudres y Polkinghorne), han contribuído a esta nueva posición.

2) La teoría de la Forma y en particular Max Wertheimer han estudiado el isomorfismo entre las estructuras físicas y las estructuras mentales. En efecto, tanto los procesos dependientes de la percepción como los dependientes de la inteligencia tienden hacia un equilibrio. En los actos de inteligencia, así como en las percepciones, hay pues siempre reequilibraciones. Esas equilibraciones se constituyen en "estructuras totales" según las leyes de organización. Estas no se deben a la asociación entre elementos aislados sino a la totalidad como tal. (1) La teoría de la Forma re-

---

(1) Piaget, Jean: Ce qui subsiste de la théorie de la Gestalt dans la psychologie contemporaine de l'intelligence et de la perception. (Revie Suisse de Psychologie, 1/1954).

futa así la antigua teoría del asociacionismo y ha encontrado numerosas aplicaciones pedagógicas, como el citado ejemplo de Catherine Stern.

Los pedagogos y sicólogos consideran, cada vez más, el conjunto del problema de las adquisiciones de las nociones desde el ángulo de una evolución determinado por las leyes del crecimiento y no solamente por ejercicios. Tal parece ser, en particular, la concepción de Friedrich Drenckhahn. Su sistema comienza por una etapa experimental seguida de una etapa intuitiva, siendo para él la intuición sólo un vínculo entre la etapa experimental-intuitiva y la etapa formal que se prepara.

Para Johannes Wittmann, que distingue una larga serie de etapas que conducen a la noción del número cardinal, preparando la noción del número ordinal, parece que hay interferencia contínua entre las leyes del crecimiento y la influencia de los ejercicios.

Maurice Béguin y otros, recién introducen las imágenes en 5.o y 6.o año primarios, como generalización intuitiva y preparación para una enseñanza posterior más sistemática. Es igualmente el punto de vista de Emma Castelnuovo.

La Mayoría de los pedagogos actuales no consideran todavía a la evolución desde el ángulo de una concepción genética estructural, sino desde el punto de vista de una simple sucesión de adquisiciones diferentes e independientes las unas de las otras. Tal es el caso en particular de Carleton Washburne quien ha estudiado en detalle, por procedimientos experimentales y por la estadística, la evolución de las nociones en función de la edad mental, basándose esencialmente en las técnicas de la enseñanza gráfica e intuitiva.

La investigación de Washburne duró cinco años (1926-1931), teniendo la colaboración de 148 ciudades americanas y varios millares de niños. Sus resultados demuestran claramente que toda noción aritmética es debida a una etapa en el desarrollo mental, antes de la aparición de la cual toda enseñanza carecería de efecto o sería perjudicial, mientras que —una vez alcanzada esa etapa— la mayoría de los niños asimilarán la noción con un éxito razonable. Para precisar las etapas a cuyo nivel se produce ese pasaje, el "Comité de los Siete" necesitaba un gran número de niños que presentasen, dentro de lo posible, una gran dispersión de las edades mentales, sobre las que se aplicase el mismo procedimiento pedagógico, para que se pudiese examinar y luego testar a todos los niños seis semanas después de la conclusión de la enseñanza del tema estudiado.

El primer paso en la técnica de trabajo adoptada por ese "Comité de los Siete", fue un estudio comparativo del estado de la enseñanza de las distintas nociones aritméticas según las diferentes edades. (1).

Veamos a título de ejemplo algunos de los datos: (2).

Notion	Nombre d'écoles dans lesquelles la notion est enseignée effectivement					
Années scolaires (degrés)	1	2	3	4	5	6
Ages approximatifs	6	7	8	9	10	11
Additions de nombres entiers . .	185	116	9			
Soustractions simples	114	183	13			
Multiplications simples	8	115	181	5	1	
Divisions simples	3	79	210	17	1	
Signification des fractions simples	31	67	85	86	37	2
Additions et soustractions de fractions simples	2	2	4	119	179	3

Sobre la base de estos primeros datos se organizó una enseñanza para cada año escolar, tanto para los grados inferiores como superiores, según los procedimientos precisos del "Comité de los Siete". Pero antes de recibir esa enseñanza todos los niños fueron testados, para establecer los conocimientos de aritmética que hubiesen adquirido en la enseñanza preliminar. Cuando los niños mostraban lagunas que podían ejercer influencia sobre la investigación, se pedía a los maestros que revisasen esos elementos con los niños, a fin de que todos estuviesen colocados en las mismas condiciones. Para eliminar a los niños que habían recibido una enseñanza más adelantada y que en consecuencia conocían el tema que se iba a estudiar, se aplicó lo que Washburne y sus colaboradores llaman el "pretest" (3).

Al comenzar la investigación se somete a todos los niños a una prueba de inteligencia colectiva (National In-

(1) Washburne, Carleton: "When should we teach arithmetic?". A Committee of Seven Investigation. The Elementary School Journal. May 1928.

(2) . .Washburne, Carleton: "Adjusting the school to the child". World Book Co. N. Y. 1932.

(3) Washburne, Carleton: "Mental age and the arithmetic curriculum: A summary of the Committe of Seven grade placement investigations to date". Journal of Educational Research, March 1931.

telligence Test, Otis Primary Intelligence Test, Haggarty Delta I).

La enseñanza de la noción se hace siempre según las prescripciones del comité para lo que concierne a los métodos que deben aplicarse y el material didáctico eventual, la duración, el orden de presentación. Después de la conclusión de esa enseñanza estandarizada, es decir, después de 6 a 10 semanas, se realiza una prueba final que corresponde exactamente, en su contenido general, a las pruebas utilizadas antes de la experiencia. Durante el período mismo de la enseñanza se realiza, dos o tres veces, una prueba intermedia para controlar el progreso de los escolares. Seis semanas después de la conclusión de la enseñanza se aplica otra vez un test, para conocer qué es lo que ha sido retenido por los niños, pero sin que durante ese lapso se haya vuelto a hablar en clase de la enseñanza de esa noción.

La estimación y la interpretación han sido las siguientes: la relación entre el test que medía lo que se había retenido después de seis semanas y el test de base que medía la adquisición y comprensión de las nociones y de los conocimientos antes del comienzo de la experiencia, ha permitido llegar a la conclusión de que es necesario un mínimo de conocimientos de base para una enseñanza provechosa.

Otro factor importante de los resultados obtenidos es la relación entre la edad mental y la facultad de retener un proceso cualquiera. Esta relación muestra claramente que es perfectamente inútil enseñar una noción cualquiera, antes de que una cierta etapa de desarrollo mental haya sido alcanzada. Por el contrario esa noción o esa operación pueden ser enseñadas después con más facilidad y seguridad.

El "Comité de los Siete" ha tratado de establecer escalas de evaluación considerando los criterios útiles para los maestros y para la administración escolar y ha adoptado este criterio: Ninguna noción de aritmética debe ser enseñada antes que los niños hayan alcanzado un cierto grado de habilidad para las materias aritméticas preliminares indispensbles y antes que haya alcanzado una edad mental tal que permita, en el 75 % de los casos, que la noción se adquiera. El contralor se efectúa por medio "del test de retención" seis semanas después de la experiencia, con un resultado de 80 % como mínimo. Es así como el "Comité de los Siete" ha podido establecer dos escalas para cada tema de la enseñanza de la aritmética. Primero se ha podido establecer una edad mental mínima, a partir de la

cual determinada noción puede ser enseñada con éxito y luego se ha podido indicar una edad mental óptima. La edad mental mínima corresponde a la etapa definida anteriormente: tres cuartas partes de los sujetos deberán poder pasar un "Test de retención'' seis semanas después de la experiencia, con un éxito de por lo menos un 80 % de soluciones acertadas. La edad mental óptima correspondería a la parte de las gráficas establecidas en la que la curva pasaría a la horizontal, es decir cuando ya no hubiese prácticamente más progresos que comprobar.

Veamos ahora algunos ejemplos de los resultados obtenidos por el "Comité de los Siete":

Adición

Los pequeños problemas sobre la adición, cuya suma es inferior a 10, pueden ser resueltos desde los 6 años 5 meses de edad mental, es decir, en la edad en que el niño aprende a leer. Sin embargo, conviene retardar este estudio hasta los 7 años 4 meses.

Las adiciones cuyo total pasa de 10, que son considerablemente más difíciles, podrán aprenderse desde los 7 años 4 meses. Los resultados serán mucho mejores, sin embargo, si se espera hasta la edad mental de 7 años 11 meses.

El niño puede adquirir el mecanismo de la adición de tres cifras hacia la edad mental de 8 años 3 meses, pero es conveniente retardar su estudio hasta los 10 años 1 mes. Las adiciones de grandes columnas de cifras convienen que sean aprendidas más tarde todavía, hacia los 10 años 8 meses y aún a los 11 años y 4 meses.

Sustracción

Los más simples problemas, que pueden resolverse por una pequeña sustracción del primer caso, se alcanzan desde la edad mental de 6 años 7 meses, pero se obtiene un mejor porcentaje a los 8 años 3 meses.

Los problemas sobre la sustracción de números superiores a 10 no podrán ser enseñados sino un año después que los primeros, es decir, a los 7 años 8 meses por lo menos. Pero los mejores resultados se obtienen a los 8 años 11 meses.

Los niños no pueden efectuar sustracciones con retención sino cuando tienen una noción bien neta de la adición; con esta condición fundamental los niños pueden aprender

la sustracción con retención a los 8 años 9 meses, pero es más conveniente esperar hasta los 9 años 1 mes.

Fracciones

La noción de fracción no tiene mucho lugar en los programas comunes, siendo, sin embargo, una noción fundamental. Algunos pequeños ejercicios sobre las fracciones tales como encontrar la mitad de un objeto, están al alcance del niño de 6 años 7 meses. Sin embargo, el niño no puede tener un sentido bien neto de la fracción hasta la edad mental de 9 años y muchos no la alcanzan hasta los 9 años 10 meses.

Tal como se ha demostrado durante nuestra encuesta, la adición y la sustracción de fracciones de igual denominador tiene lugar a la edad mental de 9 años 10 meses, con un resultado óptimo a los 11 años y 1 mes.

Decimales

Hemos estudiado el sentido de los decimales bajo dos formas: transformación de fracciones en decimales y vice versa, luego valor relativo de las cifras. Los niños que tengan una noción precisa de la fracción, del número fraccionario, que sepan manejar los dólares y los centésimos, pueden adquirir la noción de números decimales a la edad mental de 10 años 6 meses. Sin embargo, conviene tratar esta enseñanza a la edad de 11 años 11 meses.

Números decimales equivalentes a una fracción

Este capítulo comprende ejemplos del tipo 1|2 igual 0.5; 1|4 igual 0.25.

Los niños pueden comprender y retener esto al nivel de 11 años 6 meses, pero la edad de resultados óptimos es la de 13 años 10 meses.

En conclusión, en esta vasta investigación de Carleton Washburne causa asombro que separe las operaciones matemáticas de las nociones de número y de la fracción, lo que prueba que esas nociones no se elaboran, según él y sus continuadores, en función de las operaciones, sino que los números son engendrados cada uno para sí. Nosotros constatamos en el parágrafo precedente que el aislamiento de los diferentes números sólo es posible si se considera sola la noción cardinal del número, ya que ésta omite ordenar el sistema numérico, evitando así la vinculación de

los números entre sí por medio de la adición o de cualquier otra operación. Por lo tanto no existe ninguna ley de la generación de los números, ya sea explicada por tal o cual operación, ya sea por el crecimiento en general.

VI. — La sicología de la enseñanza por la acción

1. — *La sicología de las concepciones antiguas*

La aplicación de las nuevas ideas pedagógicas, desde el comienzo del siglo hasta nuestros días, ha tenido por resultado hacer al niño más activo, introduciendo un vínculo entre la actividad manual y la actividad mental. El alumno es alentado a obrar espontáneamente para descubrir, por sus propios medios, por sus propias fuerzas, las nociones y las operaciones necesarias para un razonamiento deductivo.

Por medio del estudio de los procedimientos pedagógicos utilizados, hemos podido comprobar, sin embargo, la lentitud en la evolución de los métodos. Varios sistemas, propuestos hace cuarenta años, han conservado su actualidad, como los de John Dewey, Ovidio Decroly, M. Audemars y L. Lafendel, pero sin que sus aplicaciones se multipliquen como habría podido esperarse. ¿Cómo es posible explicarse este retardo en la aplicación de los métodos nuevos a la escuela, cuando los mecanismos del conocimiento están precisamente caracterizados por el vínculo entre la acción concreta y la acción mental? Por lo tanto conviene estudiar la teoría de John Dewey, el único que analiza el pasaje de lo concreto a lo abstracto, así como el punto de vista genético defendido, en particular, por Decroly, pero asi no se ven, en estos autores, las leyes de crecimiento que caracterizan esa evolución.

En oposición a los métodos habituales que recurren a la enseñanza gráfica e intuitiva, los métodos de la escuela activa proceden por medio de un análisis, fundado sobre la acción, de conjuntos de objetos presentados a los niños. Dewey insiste, por ejemplo, en que, en un grupo de objetos, el niño debe siempre reconocer el conjunto que ellos constituyen, es decir, la unidad que expresa ese grupo, por una parte, al lado de los objetos distintos que lo componen. Esta exigencia implica, en general, que los objetos sean idénticos, pero que sin embargo sea posible distinguirlos por diferencias cualitativas, tales como la posición o la sucesión temporal.

La abstracción es pues más compleja, ya que exige que se noten las diferencias en la individualidad de cada uno

de los objetos separados y que se considere que esas individualidades forman un todo, una suma. Desde que los objetos, en sí mismos, no tienen las mismas características, el problema es doblemente complicado y la operación preliminar consistirá en clasificar los objetos según sus parecidos, haciendo abstracción de sus diferencias.

Toda clasificación tiene necesidad de análisis y discriminaciones, las que son características de una cierta edad de la infancia. Si el niño puede decir rápidamente cuántas caras tiene un cubo, tenemos entonces aquí el resultado de un conocimiento directo e "intuitivo", de discriminaciones anteriores. Dewey afirma que el niño no posee todavía esa intuición. El niño tiene necesidad de analizar. El maestro olvida a menudo que el niño no considera los objetos de la misma manera que el adulto, dice Dewey. Si se les muestra a los niños cinco objetos, un triángulo o un círculo, esto no significa que ellos adquieran la noción de esos objetos. El maestro "admite demasiado fácilmente que existe, en la conciencia del que aprende, lo que no puede existir sino como producto de una actividad mental propia en el proceso de las definiciones, discriminaciones y relaciones. "La enseñanza de los números se hace todavía mostrando una gran cantidad de objetos aislados, cuando se quiere introducir la noción del número uno, luego se agrega otro objeto, después otro, etc. Es así como, dice Dewey, se omite la actividad preliminar consistente en analizar el todo compuesto de partes, tanto como su corolario: todas las partes hacen un todo.

Junto a la operación de discriminación (análisis), la noción de número implica también el arreglo de las unidades (las partes) en una cierta relación que las ordena entre sí. Si al distinguir una cosa de otra el niño pierde de vista la identidad, el eslabón que los une, entonces no obtiene ninguna idea de grupo y por consiguiente no es posible la enumeración, ya que para él sólo hay cosas sin relación entre sí.

Estas dos características de la génesis del número son pues cualitativas y no ofrecen ningún aspecto matemático. A la clasificación, que presupone la existencia de una relación de las partes al todo, se agregan las relaciones que ordenan las clases: las dos acciones constituyen el número.

"La idea de número no está impresa en el espíritu por los objetos, aún cuando estos sean presentados en las circunstancias más favorables. El número es un producto de la manera mediante la cual el espíritu reparte los objetos

en una operación, permitiendo pasar de un todo vago a un todo bien definido". (1). Esta operación engloba, por una parte, la discriminación o el reconocimiento de los objetos como siendo individualidades distintas (unidades) y, por otra parte, la generalización. Esta última actividad implica además dos procedimientos: la abstracción, es decir, la omisión de todas las cualidades características, y el agrupamiento, es decir, la reunión de objetos idénticos (unidades) en un todo o en una clase: la suma.

Si se admite esta naturaleza sicológica del número, de acuerdo con Dewey, se puede entonces estudiar su origen. El número no es el resultado de la percepción sola, sino de ciertos procesos racionales que analizan esas percepciones e implican acciones.

También para Decroly la abstracción sólo es una sucesión de percepciones y es en sí misma activa: "observar es establecer relaciones entre aspectos graduados de un mismo objeto, buscar las conexiones entre distintas intensidades, constatar sucesiones, relaciones espaciales y temporales; es hacer comparaciones, notar diferencias y semejanzas en conjunto o en detalle (análisis), es establecer un puente entre el mundo y el pensamiento" (2). Por lo tanto la percepción sola tiene poca significación y sólo representa una guía inmediata de la intuición. Por eso es que exige ser precisada por la medida. Entonces la observación receptiva pasiva y la observación medida activa son las que, en el sistema Decroly, forman unidas un todo. La observación del crecimiento de una planta por simple percepción visual no basta. Debe completarse por la medida del aumento diario o semanal. En otros términos: la observación consiste entonces en una actividad: las primeras sensaciones conducen a las comparaciones de objetos o de situaciones parciales que están en juego. Por medio de su coordinación respectiva el niño elabora una vista general. Esta coordinación corresponde bien a un primer razonamiento. Una vez que el niño haya adquirido esas primeras nociones las podrá transportar a un caso particular. Según Decroly el resultado de esa elaboración queda grabado en el espíritu del niño, ya sea por un dibujo, ya sea por una frase (definición).

(1) McLellan James and Dewey John: "The psychology of number and its application to methods of teaching arithmetic" Appleton & Company. New York. 1895.

(2) Decroly O. et Hamaïde A.: "Le calcul et la mesure au premier degré de l'école Decroly". Delachaux et Niestlé , Neuchatel/Paris, 1932.

Decroly fue uno de los primeros en estudiar la génesis de las nociones, intentando discernir las etapas de la construcción de las nociones y de los conceptos.

En nuestra parte pedagógica indicamos, en pocas palabras, las etapas de esas adquisiciones. Las primeras sensaciones (vista, oído, sentidos cutáneos, olfato y gusto, sensaciones músculo-articulares) llegan, por memorización y asociación, hasta los primeros juicios y, al ponerlos en evidencia, el niño se hace capaz de las primeras generalizaciones simples, gracias a la función coodinadora general. Esta función dirige los actos propiamente dichos en coordinaciones especializadas, automatizadas, instintivas o reflejas (movimientos generales, marcha, prehensión, movimiento de los ojos, mímica y lenguaje). De este modo siempre hay, según Decroly, un pasaje del medio extrínseco (sensaciones: síntesis) a los actos (funciones coordinadoras) por el medio intrínseco (emociones).

Los mecanismos que se ponen a contribución para la elaboración de las nociones matemáticas elementales no son descriptos explícitamente por Dewey, Decroly, Audemars y Lafendel.

Dewey y Decroly consideran que una simple percepción o una sucesión de percepciones son insuficientes. La noción de número está basada sobre procesos racionales que, por su naturaleza, son activos. Dewey distingue aún las operaciones lógicas que son necesarias a la noción de número y que la preceden. Exige de sus alumnos operaciones de clasificación y de discriminación, lo que demanda indiscutiblemente un material discontínuo, es decir, colecciones de objetos (parecidos), en oposición a los objetos únicos o a cualquier otro material contínuo (líquido, etc.) Pero, para clasificar los objetos el niño debe adquirir primero las nociones más simples de clasificación, desviándose de las relaciones lógicas: o bien es posible identificarlos o bien es posible diferenciarlos.

Las clasificaciones y las relaciones, como operaciones lógicas preliminares forman un todo indisociable, como lo forman, en un estado más evolucionado, la noción de número cardinal y la noción de número ordinal. Las operaciones de clasificación, de ordenación, de equivalación dependen únicamente de las acciones del niño y no del carácter de los objetos manipulables, es decir, que la noción de número se elabora independientemente de las estructuras físicas del material didáctico utilizado.

El material de Audemars y Lafendel, descrito en la parte pedagógica, es una ilustración de estas tendencias: el niño aprende por comparaciones objetivas, es decir, mediante

equivalencias y relaciones de la parte con el todo, a organizar sus primeras operaciones lógicas y esto sólo lo consigue por medio de una manipulación concreta.

Sin embargo, si la clasificación y la seriación son las operaciones fundamentales de la génesis del número, los autores no dan ninguna indicación sobre los mecanismos del pasaje de operaciones cualitativas a las operaciones cuantitativas o matemáticas (numéricas).

2. — *La sicología genética actual*

Hasta aquí partimos de las concepciones pedagógicas para tratar de descubrir su sicología implícita. En adelante, partiremos de las concepciones sicológicas modernas para examinar lo que pueden ofrecer a la pedagogía activa.

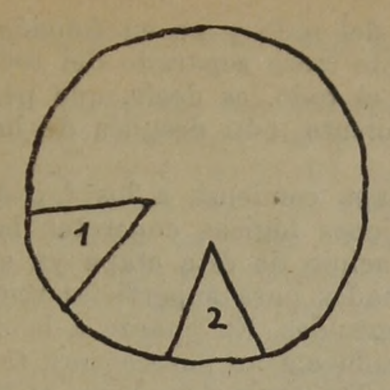
En relación con nuestra discusión precedente, es interesante dar primero un breve resumen del estudio sicológico realizado por Jean Piaget, Bärbel Inhelder y Alma Szeminska, analizando la génesis de la noción de fracción en el niño, para tratar de distinguir los mecanismos de construcción que se encuentran implicados en ella. Los autores distinguen tres etapas sucesivas:

La primera etapa comienza a los 2 años y dura hasta los 4 o 6. En ella el niño encuentra la solución exacta para la división en dos. En efecto, los autores encontraron las particiones características siguientes:

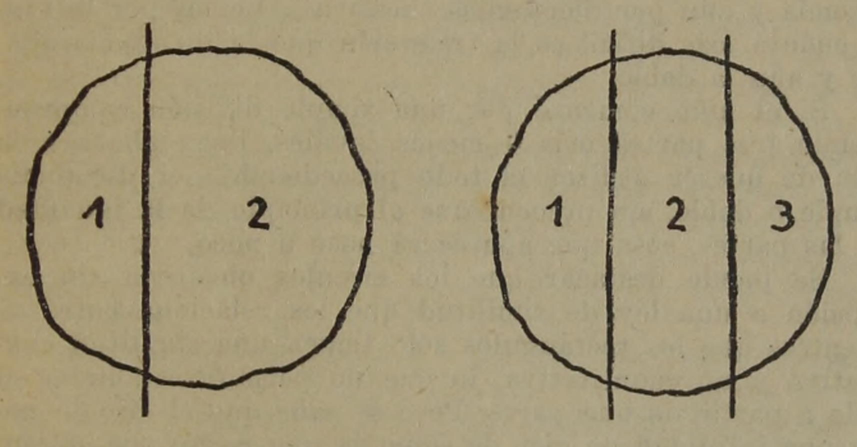
a) El niño corta dos partes más o menos iguales de la torta (en forma de sectores, por ejemplo) sin tener en cuenta la consigna de que partiese toda la torta (ver figura 59). Si los niños, a los 2 años, comprenden todavía con dificultad la idea de reparto y se niegan, en consecuencia, toda división, aquellos que se deciden a trabajar no pueden detenerse y "el fraccionamiento se convierte así para ellos en una especie de fin" (1). Esto demuestra la falta de anticipación.

b) Poco a poco los niños llegan a la dicotomía, pero hay que distinguir dos clases de soluciones: por una las

(1) Piaget, Jean, Inhelder Bärbel, Szeminska Alina: "La géométrie spontanée de l'enfant". Presses Universitaires de France, Paris, 1948.



partes no son iguales y por la otra el niño confunde el número de partes con el número de cortes (ver figura) y en este último caso se tendrán tres partes.



c) La división en cuatro demuestra los mismos fenómenos: primero fraccionamiento contínuo, luego corte de dos partes iguales pero independientes del todo y en fin, intento de una doble dicotomía que fracasa por falta de un esquema operatorio anticipador.

Se trata pues de una partición cualitativa (llamada intensiva). Por lo tanto es necesario que el niño reconozca las igualdades entre la suma de las partes A y A' y el todo B, pues A más A' es igual a B, si se trata de una simple dicotomía, pero esa igualdad no implica de ningún modo una relación entre las partes. En este problema sólo intervienen las inclusiones lógicas o diferencias $A < B$ y $A' < B$.

Piaget destaca la interdependencia de las partes. Si para nosotros una mitad es solidaria de la otra, para los niños de 2 a 4 años y medio esta condición no es consciente; por esto es que el fraccionamiento, en los niños, se hace

indePedientemente del todo y no en función de éste. "Una "parte" es un simple trozo separado del todo y no un elemento incluído en el todo, es decir, que permanece ligado a él por el pensamiento, aún después de haber sido separado".

La segunda etapa comienza a los 4 o 4-6 años y conduce a las operaciones lógicas concretas hacia los 7 u 8 años. Desde el principio de esta etapa ya se ha adquirido la partición en mitades para superficies regulares, siempre que no sean muy grandes. En cuanto a la división en tres partes iguales el problema no parece muy fácil. Los tres sicólogos han podido distinguir dos clases de soluciones. Unas pueden ser comparadas con las precedentes. "Consisten en contar la totalidad en pequeños trozos, con utilización ulterior del residuo"; las otras están "inspiradas en la división en mitades: el sujeto trata de obtener tercios por dicotomía y aún por dicotomías sucesivas'. Vemos por lo tanto cuánto más difícil es la trisección que la dicotomía simple y aún la doble.

Si el niño comenzó por una simple división comprendiendo tres partes más o menos iguales, llega ahora a la idea de querer utilizar el todo procediendo por dicotomía simple o doble, sin preocuparse al principio de la igualdad de las partes, cosa que aparecerá poco a poco.

Se puede destacar que los círculos obedecen sin excepción a una ley de similitud que los relaciona entre sí, mientras que los rectángulos sólo tienen una similitud cualitativa y no cuantitativa, lo que no permite establecer el todo a partir de una parte. Pero se sabe que el círculo posee una infinidad de ejes de simetría que pasan por el centro, pudiendo ser considerado cada uno de ellos, como un corte eventual para obtener mitades. En cuanto a la trisección es necesario, para obtener la solución exacta, tres cortes que partan, como radios, del centro del círculo. Por lo tanto se comprende la dificultad del niño ante este problema complejo que exige, no un solo corte según un eje de simetría, sino tres cortes a la vez, distribuídos, además, en una forma bastante complicada. En cuanto al rectángulo, la trisección puede hacerse con rectas paralelas, lo que lleva no sólo a una igualdad de las partes sino también a su simetría recíproca y a la simetría de las partes extremas respecto a la mediana. Si el número de los cortes es de tres en el círculo para obtener tercios, sólo se necesitan dos para el rectángulo. Esto crea dificultades para las generalizaciones.

Si bien las soluciones son siempre las mismas, cuando

se parte de una dicotomía, sin embargo Piaget ha podido hacer algunas diferenciaciones: "si la trisección del rectángulo es un poco más fácil que la del círculo, la del cuadrado es de dificultad intermedia". Sin embargo, las soluciones observadas son parecidas en todos los casos.

"Hacia los 6-7 años, generalmente, la división en tres partes iguales se hace posible gracias a una anticipación operatoria y no por tanteos o de manera fortuita". Poco a poco los niños adaptan, más o menos, el esquema de las dicotomías al de la trisección. La igualdad de los trozos no es perfecta pero es buscada desde el comienzo y además el todo es utilizado también desde un principio.

Llegamos así a la **tercera etapa**, que comienza a los 7 años generalmente y que está caracterizada por la capacidad de los sujetos para encontrar una solución inmediata. Hay una comprobación que es interesante: si bien la mayoría de los sujetos examinados por los tres autores asistieron en sus respectivas casas al reparto de tortas, no llegan, sin embargo, a una reproducción, como podríamos sospecharlo, es decir, "el ejemplo no sirve de nada mientras no esté acompañado de una iniciativa verdadera y la simplicidad aparente de las acciones y de las operaciones recubre, casi siempre, una gran complejidad en su elaboración previa".

Es posible preguntarse si la dicotomía, por una parte, y la trisección por la otra no provocan **el reparto en sextos**, siendo una **combinación de los dos procedimientos ya** adquiridos. Si generalizamos podríamos preguntarnos, también, si el reparto en un número par de partes es más fácil que el reparto en un número impar, pues el primero supone la dicotomía pura, simple y sucesiva (si se trata de números del tipo 1|2) y el segundo una anticipación operatoria más compleja.

Pero, respecto a esto, Piaget, Inhelder y Szeminska han observado los mismos fenómenos con un cierto desplazamiento sobre la dicotomía simple y la trisección. "Se encuentra el procedimiento del fraccionamiento, que reaparece por desplazamiento... a causa de la dificultad más grande del reparto en cinco o en seis".

No se trata de buscar, como en los numerosos ejemplos citados de la enseñanza gráfica e intuitiva, la mejor forma de presentación para que se forme la imagen adecuada de la noción de fracción. No basta tampoco que el maestro haga la demostración de sus repartos (exactos) entre sus alumnos reunidos a su alrededor, pero es necesario que cada ni-

ño reparta él mismo, anticipando poco a poco las soluciones posibles.

Son numerosos los manuales y los educadores que confunden la partición de un conjunto discontínuo y estructurado (por ejemplo, las colecciones de objetos) y la partición de un conjunto contínuo no estructurado. Si la primera nos conduce a la génesis del número entero, la segunda atrae bien el concepto de la fracción pero, por el hecho de la no estructuración de este material, con un retardo bastante importante (de dos años como término medio) para las generalizaciones. Sin embargo, el paralelismo estructural y lógico del pensamiento entre las dos particiones es asombroso y nos muestra bien la isomorfía en la adquisición del número y de la fracción particular simple, aunque con un retardo de la última, sobre todo para las fracciones de valores más pequeños. Los dos desarrollos comienzan por cuantificaciones intensivas, haciendo intervenir sólo las relaciones entre las partes y el todo, sin tener en cuenta las relaciones entre las partes mismas.

Ahora es interesante comparar las relaciones entre los resultados obtenidos de las particiones de un material contínuo, ya descripto y los resultados de las particiones de conjuntos discontínuos, según las investigaciones de Piaget. Este, junto con Alma Szeminska, ha investigado "la composición aditiva de las clases y las relaciones de la clase y del número" (1) donde presenta de nuevo el encaje de las clases lógicas. Veamos el esquema de esas investigaciones: "Sea B una colección de objetos individuales constituyendo una clase lógica definible también en términos cualitativos: el problema es simplemente saber si hay "más" elementos en la clase total B que en la clase incluída A, o dicho de otro modo, si la clase B es más grande o más "numerosa" que la subclase A".

Existen varias maneras de presentar este problema al niño. Nosotros nos limitaremos a describir el material utilizado más a menudo por Piaget y Szeminska. Se presenta al niño una caja conteniendo únicamente "perlas de madera" (B); una parte de ellas son oscuras (A) y dos solamente, por ejemplo, son blancas (A'). Se pregunta entonces al niño si hay más perlas de madera (B) o perlas oscuras (A). Simbólicamente tenemos en juego las combinaciones siguientes:

---

(1) Piaget Jean y Szeminska Alina: "La genese du nombre chez l'enfant". Delachaux y Niestlé, Neuchatel/Paris. 1941.

A más A' igual B.
A igual B menos A'.
$A < B$ (1)

En lo referente a los resultados obtenidos Piaget y Szeminska, distinguen tres etapas sucesivas. Durante la primera el niño es incapaz de comprender que las clases B contendrán siempre más elementos que las clases del tipo A y esto porque, sicológicamente, no llega a pensar simultáneamente el todo B y las partes A y A', lo que quiere decir que, lógicamente, no concibe todavía la clase B como resultado de la adición B igual A más A', ni la clase A como resultante de la sustracción A igual A menos A'. En el curso de la segunda etapa el niño llega, poco a poco, a establecer que las clases de tipo B contienen más elementos que las clases inclusas de tipo A, pero esto lo descubre intuitivamente, sin proceder todavía por vía deductiva y operatoria: en efecto, debido a que está obligado a visualizar las colecciones es que descubre la relación $A > B$ y no antes, gracias al juego mismo de las inclusiones resultante de la composición aditiva. El niño, en particular, descubre frecuentemente la relación $B > A$ en el momento en que piensa en el número preciso de los elementos de la clase A' (o de la clase A cuando los cuenta).

En fin, durante una **tercera etapa** el niño comprende desde el comienzo que la clase incluída B es más numerosa que la clase inclusa A, porque se coloca de antemano en el punto de vista de la composición aditiva (B igual A más A' y A igual B menos A').

Al comparar estas etapas se comprende cómo es idéntica la génesis de la conservación de la totalidad, sin que el problema en su forma matemática sea el mismo. En efecto, la primera etapa, caracterizada por la incapacidad del niño a percibir que el todo B está compuesto de todas las partes, corresponde bien al fraccionamiento efectuado por los sujetos, que no tienen en cuenta el todo al partir toda la torta y que, además, sólo cortan unos pedazos ignorando el resto.

La segunda etapa está caracterizada por la intuición síquica, como ya lo hemos encontrado para la partición de superficies.

---

(1) Queremos recordar que el símbolo $<$ sólo significa la inclusión lógica y no necesariamente una relación extensiva como "más pequeño que".

En fin, la tercera etapa comprende de entrada el problema de las inclusiones y, por consecuencia, las relaciones entre las partes y el todo, relaciones necesarias ahora y no solamente comprobadas a posteriori.

Para retornar a las investigaciones iniciales de Piaget, debemos destacar, además, que analizó las interrogaciones de los niños "para tratar de precisar si los trozos reunidos de las tortas cortadas por ellos equivalían a la totalidad primitiva".

Si los niños están de acuerdo en que la torta cortada en pedazos puede reconstituirse por medio de esos pedazos, creen por otra parte que la suma de los trozos cortados, en el estado en que se encuentran (una vez seccionados), ya no equivale al total. Esto demuestra la necesidad, para toda comprensión, del pensamiento reversible, mientras que las respuestas de los sujetos observados por Piaget sólo están dirigidas y reguladas en una sola dirección, sin posibilidad de retornar al punto inicial. Por lo tanto es posible que intuitivamente, por ejemplo, y también empíricamente, el niño presente una especie de reversibilidad, pero ésta sólo será operatoria si el producto de una operación (directa), con su inversa, corresponde a la identidad.

La paradoja de las respuestas de los niños de acuerdo a las cuales es imposible un retorno, en el sentido de que los trozos vuelvan a dar el todo inicial, pero que no habría equivalencia entre la suma de las partes y la totalidad, es ahora comprensible. Esto sucede porque para ellos la operación directa no es, necesariamente, la inversa de la operación inversa o viceversa. Además los niños se dejarían engañar por el número de los cortes tomado intuitivamente, porque sentirían una especie de proporcionalidad entre el número de cortes y la cantidad de la materia, sin que esa relación se mantenga constante, ya que desde que hay demasiados pedazos, la relación indicada se invierte.

Esto nos explica bien por qué la imagen en el manual o la demostración ante los alumnos, por concretas que sean, no tienen en cuenta, por lo general, el problema complejo de las relaciones entre los cortes y las partes, pues ellas están en función de número creciente o decreciente de las partes en juego. Maurice Béguin, en sus fichas aritméticas para la enseñanza de las fracciones pone en evidencia ese problema por la imagen, presentando así la solución ya pronta y evitando al alumno un verdadero esfuerzo. El niño sólo los comprueba a posteriori, en un dibujo estructurado, controlándolo por la enumeración o intuitivamente.

Las mediciones propuestas por Decroly y por Dewey, tampoco ponen en evidencia las relaciones entre los cortes y las partes al permitir sólo las comprobaciones sobre una situación dada y descuidando toda construcción real y espontánea.

¿Puede servir la sicología moderna de modelo para analizar otros métodos pedagógicos?

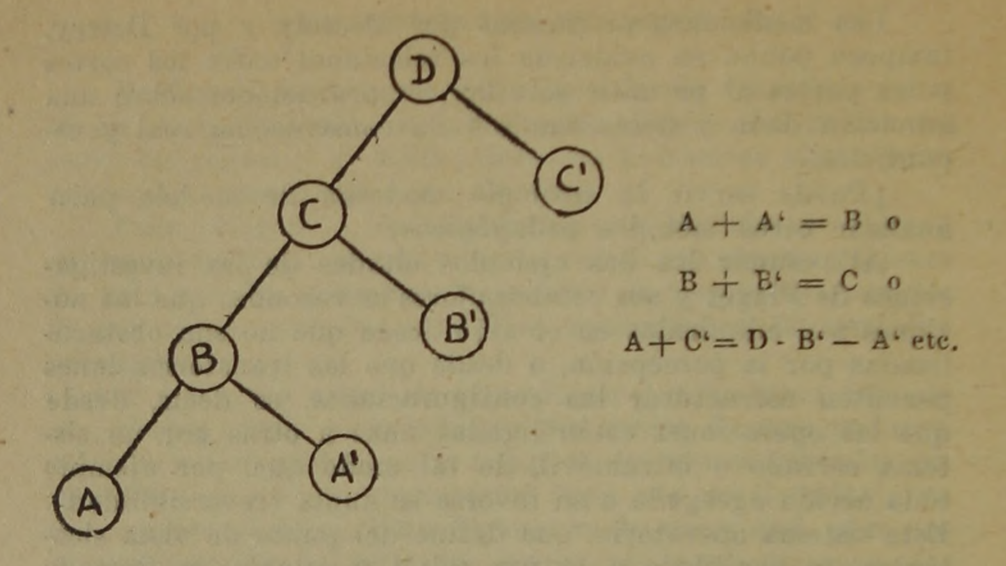
Al resumir los dos ejemplos citados de las investigaciones de Piaget y sus colaboradores se reconoce que las nociones son adquiridas en el niño desde que no son obstaculizadas por la percepción, o desde que las transformaciones permiten estructurar las configuraciones, es decir, desde que las operaciones están ligadas unas a otras por un sistema cerrado e intramóvil, de tal modo que, por ejemplo toda acción agregada a su inversa se anula (reversibilidad). Este sistema operatorio, que define del punto de vista sicológico un equilibrio a la vez móvil y estable, es llamado **agrupamiento lógico.** Creemos interesante recordar sus leyes porque son estos agrupamientos lógicos o cualitativos, en los cuales el número no interviene todavía, los que caracterizan las clasificaciones, las seriaciones, correspondencias calificadas y otras actividades prenuméricas del niño que son, sin embargo, necesarias a la construcción sicológica del número.

Veamos las cinco leyes que la rigen:

1) Si se componen dos operaciones equivalentes se obtiene una operación del mismo tipo, por ejemplo:

$$(A + A = B) \ (B + B' = C) = A + A' + B' = C)$$

Es necesario, pues, que cada acción esté coordinada con otra sin cambiar el carácter de la ley de composición. Simplificando se podría decir lógicamente que los elementos (o las nociones) de un agrupamiento están unidos por una operación precisa, o la inversa que la aplicación de dicha operación sobre los elementos del agrupamiento nunca puede sobrepasar a los elementos. Por ejemplo, si A, A', B, B', C, etc. son elementos del agrupamiento siempre se podrían combinar dos cualquiera de esos elementos obteniendo una tercera especie del mismo agrupamiento; sea:



Por estos cálculos ya se puede prever la quinta ley (ver más adelante).

2) Desde el punto de vista sicológico la operación directa no basta para conservar un elemento. La operación inversa es la que garantiza esta estabilidad, pues a:

(A + A' = B) corresponde (— A — A' = — B)

Por analogía con lo que se ha hecho para la operación directa (1) se simplifica lógicamente escribiendo:

si A + A' = B se tiene que B — A = A' o que B — A' = A

3) En un cierto sentido se puede prever un caso particular sustrayéndole un tamaño cualitativo de la identidad.

Sea:

+ A — A' = O lo que quiere decir A + O = A

Esto significa, sicológicamente, que la combinación de una operación directa con su inversa idéntica no cambia para nada el sistema. Esta anulación es siempre un medio de contralor y causa de la formación de las nociones estables.

4) La asociatividad es otro medio para fijar el sistema; sin ella toda composición llevaría a un resultado diferente en función de la sucesión de las composiciones o de sus direcciones. Es necesario que:

$$(A + A') + B = A + (A' + B')$$

para la estabilización de las nociones. Sin embargo, la condición necesaria es que en cada lado de esta ecuación esté contenido el mismo número de tautologías (ver ley 5).

5) En fin, si se han compuesto dos elementos idénticos, es decir, si sicológicamente una operación está compuesta con ella misma, nada cambia el sistema. Se trata pues de una nueva identidad, pero esta es especial en oposición a la que hemos estudiado en el número (3).

Por lo tanto es necesario que:

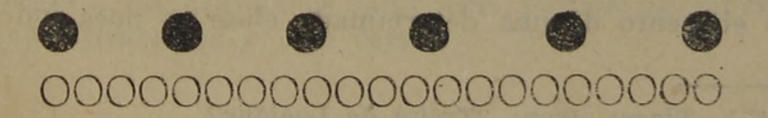
$$A + A = A: \textbf{ tautología y}$$

$$A + B = B \text{ reabsorción}$$

Desde el punto de vista sicológico, tautología y reabsorción permiten diferenciar la misma acción o el mismo objeto de todos los demás.

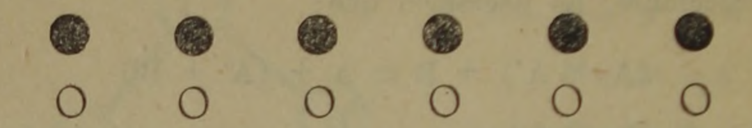
Tales son las condiciones sicológicas para un equilibrio de las operaciones elementales de la inteligencia.

Por otra parte, debemos notar que la conclusión de tal agrupamiento se marca por la constitución de las nociones de conservación, esenciales desde el punto de vista del pensamiento matemático (conservación de los conjuntos, del número, etc.) Hay un ejemplo tomado de las investigaciones de Piaget que demuestra bien ese pasaje: se presenta al niño seis fichas azules y se le pide que encuentre otras tantas rojas, para lo cual se pone a su disposición una colección de fichas de ese color. Los muy pequeños, hasta los cuatro años y medio o cinco, sólo juzgan sobre la cantidad del espacio ocupado, seriando las fichas unas al lado de las otras sin espaciarlas, es decir, sin ninguna correspondencia entre las dos colecciones:

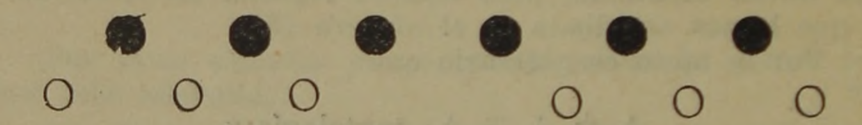


Si para los muy pequeños el esquema anterior "es la

misma cosa'', hay una segunda etapa que se caracteriza por una correspondencia propiamente dicha, en la que el niño coloca siempre una ficha roja frente a una azul:



Contrariamente a lo que se podría pensar, el niño no tiene todavía noción de número, porque desde que se aparta ligeramente la serie roja a la vista de los niños, el niño niega la equivalencia ya que ésta sólo se basa sobre una correspondencia visual.



La noción de número queda establecida cuando el niño admite la equivalencia que ha podido constatar a pesar de los cambios en la configuración perceptiva de las fichas. Así hay dos condiciones sicológicas para la construcción de esas equivalencias duraderas: la conservación del todo (reposando sobre operaciones lógicas) que de ningún modo supone el número sino la reversibilidad de las acciones y la relación duradera de la parte al todo; es necesario poder ordenar los elementos, es decir, seriarlos de tal modo que haya correspondencia uno por uno.

Parece que hay aquí varias formas de agrupamiento que conviene conocer, estudiando **las operaciones lógicas que dan nacimiento a los agrupamientos.** Toda enunciación elemental o toda **proposición,** para hablar como los logísticos modernos, se caracteriza por su forma y su contenido. "El contenido" de una relación operatoria está constituído por los datos o los términos que los sustituyen, mientras que la ''forma'' es lo que permanece incambiado durante tales sustituciones". (1)

Si en una proposición verdadera se sustituye un término por otro de tal modo que la proposición siga siendo verdadera, el conjunto de esos términos formará una **clase.** Todo elemento de una determinada clase es pues indepen-

---

(1) Piaget, Jean: "Traité de Logique".

diente de todo el resto, pero ligado a los otros únicamente por un carácter común. Esta vinculación o **relación** es pues la característica de la dependencia. ''Una relación es lo que caracteriza a un término por intermedio de otro".

Estas relaciones pueden ser asimétricas por naturaleza (por ejemplo A ⟶ B, pero no A ⟵ B: "A es 'más grande' que B", pero no "B es 'más grande que' A", siendo 'más grande que' la relación asimétrica) o de naturaleza simétrica (por ejemplo A <——> B: "A es 'diferente de' B", por lo tanto "B es 'diferente de' A", siendo 'diferente de' la relación simétrica).

Ya podemos prever, por lo tanto, cuatro agrupamientos posibles que se distinguen por la simetría y la asimetría y por las clases y las relaciones. Pero se podrá distinguir no sólo 2^2 agrupamientos posibles sino 2^3 igual 8. En efecto, dos operaciones lógicas pueden ser de naturaleza aditiva o multiplicativa.

La adición de las clases, por ejemplo, consiste en encontrar la más pequeña de las clases que contenga a las clases que se quiere adicionar: A más A' igual B o B más B' igual C, etc. Lo mismo para las relaciones: si tenemos

$$O \xrightarrow{a} A,\ A \xrightarrow{a'} B,\ O \xrightarrow{b} B,\ B \xrightarrow{b'} c,\ O \xrightarrow{c} C, \text{ etc.}$$

$$\text{entonces } \xrightarrow{a} + \xrightarrow{a'} = \xrightarrow{b} \text{ y } \xrightarrow{b} + \xrightarrow{b'} = \xrightarrow{c}, \text{ etc.}$$

La multiplicación de dos clases está representada por su intersección; es pues la clase más grande incluída en las clase" dadas. Son los elementos que pertenecen "a la vez" a las clases dadas. El entrever dos o más relaciones a la vez significa ya multiplicarlas, etc.

Las relaciones tienen, pues, en apariencia inmediata, las mismas significaciones aditivas y multiplicativas que en matemáticas. Basta recordar la quinta ley de agrupamiento lógico, concerniente a las tautologías y las reabsorciones, para comprender la diferencia existente entre el cualitativo y el cuantitativo. En pedagogía lo que se querría conocer mejor es el pasaje de uno al otro.

¿Es la lógica esencialmente cualitativa y las matemáticas de naturaleza cuantitativa? Nunca se conciben ni se perciben las cualidades solas, sino siempre acompañadas de cuantificaciones y vice versa.

Piaget distingue tres tipos de relaciones entre calidad y cantidad, encontrados genéticamente: (1).

a) **Cantidades intensivas o cualitativas** (término debido a Kant).

La cantidad intensiva define la relación de la parte al todo, sin poner en evidencia las partes entre si. Supongamos que:

$$A + A' = B;\ B + B' = C;\ C + C' = D \quad \text{etc.} \quad o$$
$$A < B;\ A' < B;\ B < C;\ B' < C; \quad \text{etc.}\ (2)$$

No se conoce en este caso la relación entre A y A' o B y B', etc.

Pero estas son las únicas relaciones que intervienen en lógica formando los agrupamientos cualitativos de que hemos hablado.

b) **Cantidades extensivas.**

La cantidad extensiva define, además de la relación entre la parte y el todo, las relaciones de las partes entre sí. Supongamos, además de las ecuaciones mencionadas en (a):

$$A < A' \ \ o \ \ A = A' \ \ o \ \ A > A';$$
$$B < B' \ \ o \ \ B = B' \ \ o \ \ B > B'; \text{etc.}$$

sin precisar (matemáticamente) las diferencias (salvo para los casos límites de las igualdades).

c) **Cantidades métricas o numéricas.**

---

(1) Piaget Jean et Inhelder, Barbel, "Le developpement des quantités chez l'enfant". Delachaux et Niestlé Neuchatel. París, 1941.

(2) Hay que destacar que el signo $<$ o el $>$ no es utilizado en logística como en matemáticas. Si bien indica en relación de los tamaños cuantitativos, indica primeramente la pertenencia o la inclusión.

Supongamos que además se pueda precisar cualitativamente las diferencias entre las partes. Se tendrían, además de las igualdades y desigualdades mencionadas en (a) y en (b):

por ejemplo: A = A' o A = 2 A'; etc.

por lo tanto: B = 2 A para A = A' y

$$B = \frac{3\ A}{2} \text{ para } A = 2\ A'; \text{ etc.}$$

La sicología genética de Piaget ha demostrado que la lógica no es innata y que debe formarse poco a poco. Por lo tanto no éxisten, de entrada, relaciones perceptivas o intuitivas de las cantidades extensivas, pero el niño parece mezclar lo intensivo y lo extensivo, de tal manera que una indiferenciación impide la formación de un agrupamiento. También hemos comprobado que la percepción y la intuición no alcanzarán al agrupamiento porque se mantienen rígidas e irreversibles· Por lo tanto sería necesario que el niño quebrase las estructuras perceptivas para poder construir un sistema de operaciones objetivas.

Lo primero que el niño es capaz de construir es el agrupamiento lógico, es decir, el agrupamiento de las cantidades intensivas. Pero la operación lógica no es, como en los manuales clásicos, aislada, sino que aparece en forma de conjuntos: "cada operación sólo existe en función de cada una de las otras. En efecto, no hay operación aislada por la simple razón que sería contradictoria, pues una operación es una acción virtual, pero una acción que se puede a la vez coordinar con otras (composición) y desarrollar en los dos sentidos (reversibilidad)". (Piaget op. cit.).

Averigüemos ahora en qué forma el niño procederá de las cantidades lógicas a las cantidades matemáticas. La cuantificación lógica se reduce a las cantidades intensivas, la de las matemáticas supone las cantidades métricas. Por lo tanto hay estructuras lógicas sin intervención matemática, tales como las clasificaciones y las relaciones seriales, pero todas las estructuras matemáticas implican las relaciones de la parte al todo, que fundan la cantidad lógica. En matemáticas las estructuras intervienen en la teoría de los conjuntos del álgebra, en la topología, etc.

Las mediciones propuestas por los pedagogos de la escuela activa deben estar precedidas por ejercicios cualita-

tivos: ordenación, clasificación y seriación, sin preocuparse de las cantidades métricas o numéricas que se introducen poco a poco. Es Johannes Wittmann quien propone establecer correspondencias biunívocas 1) y ha sido Dewey quien, hace ya más de sesenta años, pedía ejercicios de clasificación y de seriación (ordenaciones). Montessori y otros educadores preconizan las seriaciones pero casi siempre en una forma métrica, destacando la igualdad de las diferencias, definiendo de entrada y a veces demasiado pronto una unidad. Otros preparan un material didáctico apto para ser clasificado, estableciendo colecciones de objetos diferentes. Sólo más tarde proponen las ordenaciones y seriaciones, separando —sin duda equivocadamente— las clases y las relaciones.

Es posible que se pregunte si tales agrupamientos constituyen el comienzo, desde el punto de vista del desarrollo sicológico, de ciertos grupos matemáticos. Ahora bien se sabe que el grupo matemático aparece igualmente en varias formas distintas y cada uno caracteriza un conjunto cerrado y a la vez móvil en el interior de esa totalidad. Es así que el grupo aditivo de los números no engloba todavía las fracciones y el grupo multiplicativo de los números racionales (con exclusión de O) no tiene en cuenta los números negativos. Sólo su coexistencia da el conjunto de los números de uso corriente. La distinción formal inmediata y exterior, entre el agrupamiento lógico y el grupo matemático es la supresión del último axioma del grupo matemático, es decir, el de las tautologías y reabsorciones, de donde surge la generalización de la asociatividad en todos los casos. En efecto, el grupo aditivo conoce, por ejemplo, los cuatro axiomas siguientes:

1) Operación directa: A más B igual C.
2) Operación inversa: C menos A igual B, o C menos B igual A.
3) Elemento unitario: A más O igual A; o A menos A igual O.
4) Asociatividad: (A más B) más C igual A más (B más C.

(1) Pero hay que distinguir la correspondencia calificada (puramente cualitativa) y una correspondencia cualquiera o numérica (entre unidades).

En cuanto a la quinta ley del agrupamiento (tautologías y reabsorciones) desaparece para el grupo, es decir, que la adición tautológica de las clases y de las relaciones es reemplazada por la iteración de la unidad. ¿Cómo se hace ahora el pasaje del agrupamiento al grupo? ¿Elimina el niño simple y conscientemente las tautologías y las reabsorciones? Así el agrupamiento aditivo de las clases se transformaría directamente en grupo aditivo de los números enteros, etc. Esto quiere decir que el número sería esencialmente cardinal y que el agrupamiento de las relaciones asimétricas, igualmente aditivo, llevaría al número ordinal, sin ninguna relación entre los dos números. Ahora bien, querer operar únicamente con el agrupamiento aditivo de las clases, identificando las clases en juego por la supresión de las tautologías, supondría eliminar toda distinción de los números que se seguirían sin un orden preciso.

Es por esto que la cardinación y la ordenación son indisociables y sólo su fusión explica el número: es esta fusión también la que elimina necesariamente las tautologías, es decir, reemplaza A más A' igual A (si A es igual a A') en provecho de 1 más 1 igual 2 o de A más A igual 2A. Es así que se llega —a través de la lógica operatoria de Piaget— a las intuiciones de Dewey sobre la necesidad de una preparación cualitativa de la formación del número.

La construcción racional y el desarrollo se desenvuelven así sincrónicamente: en el momento en que el agrupamiento lógico e intensivo se construye, el agrupamiento extensivo y aún métrico y numérico se desarrollará, gracias a la simultaneidad en la existencia de los diferentes agrupamientos. Pero como los agrupamientos y los grupos consisten esencialmente —desde el punto de vista de la sicología— en acciones, el número se desarrolla al mismo tiempo que las operaciones sobre los números. Y como las primeras nociones se basan todavía sobre operaciones concretas, es claro que ciertos retrasos en función de las realidades se manifiesten y que el grupo real de los números y de las medidas sea todavía en parte incompleto y fragmentario, primero, por ejemplo, para los números negativos, luego para las fracciones y por último para los valores infinitos. La causa proviene también de la intervención de ciertos datos sicológicos nuevos, tales como el punto de partida con un material discontinuo para los números enteros y el punto de partida con un material continuo para los números fraccionarios, etc.

La descripción de las investigaciones de Piaget ha demostrado que las fracciones se construyen, igualmente, en

relación estrecha con la acción propiamente dicha, es decir, la operación. La génesis del número y la génesis de la fracción ¿tienen la misma ley? Las observaciones sicológicas han permitido mostrar la elaboración esencialmente operatoria de esas nociones, comparables, en cierto sentido, a la génesis de la noción del número.

Hay que recordar que la noción de número es el punto final de una larga elaboración, que comienza por la construcción de los agrupamientos lógicos y termina por su superposición parcial, en particular del agrupamiento aditivo de las clases y del agrupamiento aditivo de las relaciones asimétricas. El resultado de una tal fusión es el grupo aditivo de los números enteros, presuponiendo simultáneamente la noción de número sobre los que se opera y la operación aditiva que vincula los elementos numéricos.

En cuanto a la elaboración de las diferentes nociones de fracciones (no hablamos de la noción de fracción), asistimos a un problema análogo. Hemos podido observar la etapa de la lógica intensiva en el niño, poniendo en evidencia, groseramente, las relaciones entre tal o cual parte y el todo. Sin embargo, muy pronto, el niño descubre la existencia de la parte complementaria o de las partes complementarias, sin preocuparse, al principio, de igualdades eventuales. Para el niño pequeño, al principio, el todo está compuesto de dos o varias partes, por ejemplo de A_1 y de su complementaria A'_1, de A_2, de A_3, de A_4, etc· si hay varias entonces A_1 más A_2 más A_3 más A_4 es igual a B. Es lo que Piaget ha llamado las "vicariances". Tomemos el ejemplo de la dicotomía simple: para el niño que ya concibe el entero, pero que no se preocupa todavía de la igualdad de las partes, el reparto en dos puede hacerse de cualquier manera:

$$A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2 = A_3 + A'_3 = \text{etc.} = B$$

lo esencial es que la clase B sea totalmente agotada.

Del punto de vista formal, con esas "vicariances" se podría definir un agrupamiento lógico que obedeciese a las cinco condiciones ya mencionadas.

Las partes estarán ligadas entre sí por relaciones simétricas en el momento de su igualación. La justa posición del agrupamiento aditivo de las "vicariances" de las clases y del agrupamiento aditivo de las relaciones simétricas dará, en nuestro ejemplo, el grupo aditivo de las fracciones, presuponiendo simultáneamente las nociones de fracción

sobre las que se opera y la operación aditiva que une los elementos fraccionarios.

El paralelismo de la elaboración de las nociones numéricas y fraccionarias es pues asombroso. Pero una distinción de las cantidades cardinales y ordinales no será posible para las fracciones, porque no existe ningún orden de las partes en juego.

A pesar de las construcciones que se basan sobre materiales diferentes (discontínuos para los números enteros y continuos para los números fraccionarios) y partiendo de agrupamientos lógicos distintos, el resultado estructural inmediato es parecido: las dos veecs se llega al grupo aditivo de los números. Mientras que el grupo de los números enteros no conoce, teóricamente, límites y crea por esto dificultades para el niño que impiden la construcción definitiva antes de la aparición del pensamiento formal, el grupo de las fracciones precisas parece mantenerse cíclico por la base lógica con las simetrías mencionadas. En efecto, en el momento en que el niño alcanza por adiciones repetidas la unidad, volverá a comenzar desde el cero, porque la unidad no es una fracción y no pertenece, en consecuencia, al grupo; veamos las condiciones formales del grupo de las fracciones:

1) $$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{c}{n} = \frac{n}{n} + \frac{d}{n}$$

lo que dará $\frac{d}{n}$ desde el punto de vista del grupo, $\frac{n}{n}$ correspondiendo a O, porque ninguna fracción interviene.

2) $$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = \frac{c}{n}$$

por lo tanto habrán fracciones negativas pertenecientes al grupo.

3) $$\frac{a}{n} + 0 = \frac{a}{n} \text{ o } \frac{a}{n} - \frac{a}{n} = 0$$

4) $$\frac{a}{n} + \left[\frac{b}{n} + \frac{c}{n}\right] = \left[\frac{a}{n} + \frac{b}{n}\right] + \frac{c}{n}$$

y todo grupo de una fracción se compone pues de los elementos siguientes:

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots, \frac{k}{n}, \ldots, \frac{n\text{-}1}{n},$$

$$-\frac{1}{n'} - \frac{2}{n'} - \frac{3}{n'} \ldots - \frac{k}{n'} \ldots, \frac{1\text{-}n}{n}$$

Tanto el grupo de los números enteros como todo grupo aditivo de fracciones particulares contienen valores negativos: los dos contienen el 0 como elemento unitario. Toda fracción será más pequeña que 1 y por lo tanto $f < 1$.

Ahora se podría preguntar cómo es que el niño generalizará sus primeras concepciones. Hemos observado no sólo que toda noción fraccionaria es independiente de cualquier otra, sino también que toda noción fraccionaria, así como la noción de número, dependen de la operación aditiva únicamente (sin intervención de la operación multiplicativa). ¿Cuándo intervendrá la operación multiplicativa y cómo se relacionarán esos diferentes grupos fraccionarios aislados?

La operación de esos grupos elementales ha sido hasta ahora siempre aditiva y el grupo fraccionario es cíclico, como hemos visto. ¿No sería necesario relacionar esas múltiples nociones entre sí para alcanzar la noción general de fracción? Y en caso afirmativo ¿por qué procedimiento?

Ahora bien, paralelamente a esa construcción de las diferentes nociones de fracción se elabora, en el niño, otro grupo más general. Al relacionar las diferentes nociones de fracción se formará un nuevo conjunto, cuya forma definitiva será igualmente un grupo matemático, pero de naturaleza multiplicativa.

Hemos visto que el carácter cardinal y el carácter ordinal se mantienen indisociables para el número entero y que éste se construye por la fusión del agrupamiento aditivo simple de las clases y el agrupamiento aditivo simple

de las relaciones asimétricas, identificando las clases. Una cosa análoga se produce en el niño en lo que concierne a la multiplicación. La fusión del agrupamiento de las clases multiplicadas biunívocamente y del agrupamiento de las relaciones multiplicadas biunívocamente forma el grupo multiplicativo de los números racionales, basándose también simultáneamente sobre la noción cardinal y la noción ordinal. Ese grupo estará compuesto por todos los números racionales positivos con excepción del 0 y cuyo elemento unitario es + 1.

Es así que parece, una vez más, que existiera parentesco entre las construcciones matemáticas, sobre todo por su dinamismo, ya que las nociones están necesariamente ligadas a las operaciones; pero los diferentes tipos de las nociones matemáticas parecen diferenciarse en cuanto a su estructura lógica aparente.

Esas explicaciones del pasaje de lo cualitativo a lo cuantitativo de Piaget, con las indicaciones indispensables de las esructuras lógicas que marcan ese pasaje, son exactamente lo que faltaba a la teoría de Dewey. Desde ahora, será claro que la manipulación del niño tiene su significación bien definida: coordinar las acciones en un sistema coherente cerrado y objetivo y no sólo explorar las estructuras físicas de esos objetos manipulables.

Los ejemplos de los estudios sicológicos de Piaget y de sus colaboradores demuestran claramente que las nociones se deben a las coordinaciones de las acciones propias en agrupamiento. Las nociones matemáticas y las operaciones matemáticas forman finalmente un todo solidario indisociable. La iniciación matemática en el niño se basa, pues, sobre una composición sucesiva e integrante de sistemas matemáticos, estructurados según leyes apropiadas que ya hemos discutido. Lo que precede lleva a examinar cómo los sicólogos se han representado el desarrollo sicológico del pensamiento.

Al estudiar genéticamente la inteligencia del niño, Piaget ha comprobado además que "la gran diferencia entre el niño de 4 a 6 años y la del de 8 a 10 años está en que el primero se apoya, para razonar, sobre las configuraciones perceptivas o ''Gestalten", mientras que el segundo razona sobre las transformaciones que conducen de una configuración a otra; pero subordinar las configuraciones a las transformaciones significa no sólo liberarse de las primeras, sino arrastrarlas en un movimiento que las transforma haciéndoles perder precisamente sus caracteres no aditivos e irre-

versibles" (1). Dicho de otro modo, el niño pequeño considera esencialmente las operaciones físicas basándose sobre las configuraciones que se le presentan. El análisis de las estructuras físicas en función de los objetos manipulados se va haciendo cada vez más especializado. Aprender por la experiencia a partir de las cosas no es, sin embargo, el único elemento de las construccionse de la inteligencia. Piaget ha observado que el niño tiende a coordinar las actividades propias o las percepciones en un sistema coherente, el agrupamiento (lógico). Al nivel del pensamiento intuitivo las operaciones físicas y las operaciones lógico matemáticas se mantienen en parte indiferenciadas. Recién hacia los 7 u 8 años, al nivel de las operaciones concretas, es que los agrupamientos lógicos se constituyen.

Piaget define la inteligencia como un equilibrio, es decir, que las tendencias mentales son mantenidas en equilibrio por la compensación de fuerzas contrarias virtuales.

Distingue Piaget dos formas distintas de equilibrio: a) las formas de equilibrio momentáneas, que se caracterizan por sus desplazamientos sucesivos, lo que es en general sinónimo de la irreversibilidad de las estructuras y en este caso el papel de las estructuras perceptivas es indiscutible. Cuando más, las regulaciones de tales estructuraciones y restructuraciones (en el sentido gestaltista) pueden preparar las operaciones reversibles del pensamiento lógico y matemático, sin alcanzarlos. Por lo tanto es cierto que las operaciones concretas en clase pueden útilmente tener un complemento en los manuales, a condición que las imágenes correspondientes permitan regulaciones, verificaciones, etc.

b) Por el contrario, las formas de equilibrio permanentes son sistemas reversibles, tales como las operaciones lógicas y matemáticas que, una vez establecidas, no cambian más. Es hacia esos equilibrios (bajo forma de agrupamientos lógicos) consistentes en transformaciones en el interior del sistema y su compensación virtual por la reversibilidad operatoria, que tiende la inteligencia. El equilibrio permanente, caracterizado por los agrupamientos lógicos y los grupos matemáticos, es objetivo y durable.

Durante las primeras etapas de la percepción, de la representación intuitiva, etc. el equilibrio estable caracteri-

---

(1) Piaget Jean: "Ce qui subsiste de la théorie de la Gestalt dans la psychologie contemporaine de l'intelligence et de la perception". Revue Suisse de Psychologie, 1|1954.

zado por el agrupamiento no puede ser alcanzado, ya que está corregido por las experiencias que no se confunden necesariamente con las anticipaciones. Tal era el caso de las observaciones hechas por Piaget, Inhelder y Szeminska en lo concerniente a las primeras etapas de la génesis de la fracción. Por lo tanto, hay un reajuste perpetuo entre la asimilación de los datos a los esquemas sensorio motores o intelectuales del sujeto, y la acomodación de esos esquemas a los datos de la experiencia. El desarrollo mental se haría pues en forma escalonada, de un equilibrio al otro, hasta alcanzar un equilibrio completo.

Ahora se comprende mejor que si se quiere estudiar una reforma de la didáctica de las matemáticas elementales, no se trata solamente de obtener límites fijos entre las etapas, como en ciertas investigaciones sicológicas y pedagógicas que se basan sobre las medidas de rendimiento (estudios de Descoeudres y Polkinghorne), o examinando la correspondencia entre la edad de adquisición de una noción y la edad mental (Comité de los Siete de Carleton Washburne); tampoco hay que tratar de encontrar las características extrínsecas que marcan y esbozan el desarrollo del conocimiento matemático, sino que siempre hay que averiguar porqué y cómo tal o cual noción puede formarse. La primera forma de esas adquisiciones es el agrupamiento lógico que aparece desde la edad escolar. Esas operaciones se realizan primero sobre objetos manipulables.

Si en las etapas preescolares y preoperatorias existe confusión parcial entre las coordinaciones generales (de las acciones) y la experimentación física, y si las operaciones concretas son el resultado de la primera disociación entre las dos, el nivel de las operaciones formales e hipotético deductivas acentúa aun esa disociación. Las coordinaciones generales desbordan en efecto, hacia los 11 o 12 años, la realidad experimental. Aparecen las nociones de infinito y de los números generalizados.

Parecería que hubiese algo de paradojal en estas consideraciones. La evolución matemática, desde el nivel de las operaciones formales ¿está en desacuerdo con lo real? En efecto, se asiste, progresivamente, a una construcción por deducción y con anticipación, sin que la realidad haya podido servir de modelo cuando su creación. Ahora bien, los coordinaciones generales vinculan bien las acciones ejercidas sobre la realidad, pero sin tomar los elementos de conocimiento a los objetos mismos, a los cuales esas acciones coordinadas se aplican. Aunque la experiencia sea necesaria al principio, el esquema de las acciones no es extraído de lo real.

La construcción matemática es fecunda y lo es, tanto como el pensamiento formal, por la abstracción reflexiva que se basa sobre el funcionamiento de las estructuras de las operaciones concretas anteriores.

CONCLUSIONES

Desde el comienzo de nuestro estudio, hemos insistido en que no examinaríamos sino la introducción de las primeras nociones matemáticas en la escuela primaria y no la didáctica completa de la enseñanza de las matemáticas elementales.

Hay que destacar que, desde el punto de vista histórico, la didáctica matemática ha estado basada, ante todo y esencialmente, sobre las concepciones de la enseñanza por aprendizajes verbales de operaciones y de reglas; más tarde, la enseñanza se basó preponderantemente sobre la intuición y la imaginación y actualmente existe la tendencia a recurrir a la manipulación concreta de los objetos. Si no ha existido una sucesión en el tiempo muy neta de esas tendencias que tuvimos que estudiar y si hubieron superposiciones continuas más o menos acusadas, es necesario, sin embargo, preguntarse si en la enseñanza moderna la tendencia a favorecer la manipulación empírica de los niños, no estaría en contradicción con las ciencias axiomáticas y formales de las matemáticas.

Desde hace años la escuela activa sufre de un profundo malestar y casi no se comprueba, en las escuelas modernas, un verdadero progreso de la didáctica. En varias ocasiones se ha comprobado, por métodos propios de la pedagogía experimental, la utilidad y la eficacia de las manipulaciones concretas de los niños, pero sin poder dar una explicación valedera de los mecanismos de construcción de las nociones a través de esas acciones concretas. Actualmente se ha hecho un esfuerzo para tratar de dar al niño explicaciones de las nociones en función de los objetos mismos, es decir, de nociones arraigadas en lo real y no en lo abstracto. Pero se actúa como si la realidad fuese el soporte del pensamiento matemático, o dicho de otro modo, como si la verdad matemática se redujese a la verdad física. Los manuales de aritmética reservados a la iniciación de los pequeños alumnos insisten sobre la denominación concreta de las cifras: dos manzanas, tres árboles, cuatro niños, etc. Al constatar así la equivalencia numérica de tres árboles, tres sillas, tres flores, etc. se llega a hacer abstracción de los objetos considerados, no manteniendo sino lo que ha sido común

a esas colecciones: el número tres. Es así como la noción del número tres es independiente del número dos, del número uno, del número seis, etc. pues es tomada de lo real.

Dicha concepción implica, ya sea el empleo de un rico material didáctico, ya sea numerosas ilustraciones. No se percibe casi la utilidad de una manipulación concreta de los niños: bastaría con presentarles colecciones numéricas idénticas para que un día llegasen a hacer, ellos mismos, esa abstracción de lo real. La práctica pedagógica se complica desde que se trata de introducir números grandes; entonces la imagen facilita la labor del maestro y la invención de Kühnel ha sido fecunda, pero la solución no es bastante satisfactoria en lo que se refiere a los números muy grondes, a las fracciones, etc.

El recurrir a lo real, confundiendo la presentación gráfica o la presentación por objetos con las actividades de tipo operatorio ¿será la razón por la cual se comprueba que la enseñanza gráfica e intuitiva en las escuelas activas de ayer y de hoy no se desarrolla casi y carece de impulso? ¿Es ese recurrir a lo real el que crea, precisamente, la contradicción con la axiomática de las matemáticas?

La enseñanza operatoria también está basada sobre hechos. Pero en lugar de hacer adquirir, progresivamente, las nociones matemáticas por observación, partiendo de los objetos concretos para formar la noción abstracta, se consideran las transformaciones de un estado al otro, de una percepción a la otra, de una situación a la otra. Estas transfomaciones dependen de situaciones concretas sobre las que se opera, pero manteniéndose ellas mismas independientes del material sobre el cual se opera. Los actos tienen la ventaja de poder ser estructurados lógicamente, de hacerse aptos para la interiorización y la abstracción, ya que esas estructuras se mantienen, aun cuando la situación concreta sea imaginaria o posible y aún cuando más tarde las deducciones se funden sobre dichas operaciones concretas. De ese modo queda garantida la verdadera continuidad del programa escolar.

Hace tiempo que el pedagogo se pregunta si la sicología moderna podría aportarle aclaraciones sobre el problema. Al discutir con la mayoría de los maestros interesados se observa que se basan, consciente o inconscientemente, sobre la sicología de la Forma.

Es cierto que la sicología de la Forma ha sistematizado y profundizado el estudio de la aprobación de las nociones, estableciendo escencialmente dos principios comunes a la percepción y a la inteligencia, lo que permite estudiar a ésta

a través de la percepción. El primer principio es el de la marcha hacia el equilibrio; el segundo, de la forma de ese equilibrio siempre expresada en estructuras totales. Pero la sicología de la Forma no ha distinguido las formas irreversibles de composición no aditiva (percepción) y las estructuras reversibles de composición aditiva (operaciones de la inteligencia).

A pesar de todo, el pensamiento matemático queda arraigado en lo real. Es cierto que Wertheimer ya distingue un estado inicial y un estado final de las estructuras, vinculadas por lo que se llama una operación. Pero esta operación, como lo hemos visto, permanece arraigada en las estructuras físicas.

La sicología de Piaget ha demostrado que las estructuras operatorias del pensamiento se constituyen, precisamente, a través de la intervención de las acciones del sujeto, aptas para ser interiorizadas como acabamos de decirlo. La elaboración de las nociones matemáticas es pues esencialmente activa. No basta con percibir la solución, con seguir una demostración en el pizarrón, con contemplar tal o cual dibujo en el manual; la operación matemática no queda reducida a un mecanismo cualquiera o a una reestructuración perceptiva, sino que es un esquema de asimilación activa, acomodado a lo real, es cierto, pero no extraído de este último; deriva de la acción sobre las cosas y no de ellas por sí mismas o por haber sido percibidas.

Desde ahora es, pues, posible interpretar las manipulaciones de los niños bajo el aspecto de las coordinaciones generales de los actos y de llegar así a las estructuras lógicas y no perceptivas. Se considera la coordinación sucesiva de los actos mismos, la sistematización de las acciones de disociación, de reunión, de correspondencia y así se tienen las bases del pensamiento matemático abstracto: la construcción matemática es pues fecunda.

La noción abstracta no es un esquema o un significante suya realidad sería el modelo o el significado. Lo sensible en la percepción, en las imágenes y las representaciones intuitivas es más bien, el símbolo o el significante y el esquema operatorio o el significado. Es así, que las operaciones pueden finalmente funcionar sin una realidad sensible superándola.

Entonces hay una respuesta para los maestros: el material didáctico puesto a disposición de los principiantes debe ser tal que permita establecer colecciones distintas (clasificaciones) y disociaciones de objetos, según distintos criterios, que permita ordenar, seriar, establecer corresponden-

cias, etc. Pero siempre el niño debe construir con sus propios medios.

Las primeras nociones matemáticas se forman por la síntesis de agrupaciones lógicas obtenida de acciones concretas: hemos citado el ejemplo de la noción de número entero, obtenida por la fusión del agrupamiento aditivo de las clases "vicariantes" y el agrupamiento aditivo de las relaciones simétricas, que constituyen el grupo matemático cíclico de una fracción particular.

Las dos elaboraciones muestran el parentesco de las construcciones estructurales, pero mientras que la noción de número está basada sobre un material discontínuo (colección de objetos, etc), la noción de fracción está basada sobre un material contínuo (por ej. un solo objeto). Es posible que convenga hacer la siguiente distinción: las estructuras lógicas se aplican a objetos individuuales, colecciones, en resumen a un material discontínuo, de tal manera que consisten en clases y en relaciones, o bien las estructuras lógicas se aplican a un material contínuo como el tiempo, el espacio, etc, En el primer caso, las operaciones son independientes del tiempo y del espacio, ya que ni el emplazamiento temporal ni el emplazamiento espacial de un objeto de la colección con respecto a otro influyen sobre esas operaciones; en el segundo caso, las operaciones dependen todavía del emplazamiento de la parte con relación al todo, aunque las estructuras lógicas, como tales, sigan siendo las mismas. Esa es la razón por la que hay que esperar un retardo de algunos meses de las operaciones espacio-temporales (contínuo) respecto a las operaciones lógico-aritméticas (discontínuo), pero este retardo nunca impide la analogía de las estructuras en los dos casos.

¿Está la aritmética basada sobre las operaciones lógico-aritméticas y la geometría sobre las operaciones espacio-temporales? No, ya que los ejemplos citados prueban bien que el sistema numérico tiene sus fuentes en un material discontínuo (números enteros) por una parte, y por otra en un material contínuo (números racionales). Pero, aún cuando la aritmética y la geometría pueden ser disociadas según los principios de la continuidad y la discontinuidad, no se diferencian del punto de vista de las estructuras lógicas. Sin embargo, se nota un cierto retardo de las operaciones espacio-temporales sobre las operaciones lógico-matemáticas, retardo debido, ante todo, a los emplazamientos de las partes con respecto al todo en estas y que faltan en aquéllas.

Hay una nueva proposición de los sicólogos a los pedagogos: los problemas sobre nociones nuevas no deberían ser abordados sino después de nuevos ejercicios que exigiesen cada vez las mismas actividades concretas, así como el mismo esfuerzo de estructuración lógica, y sólo después las nociones nuevas deberían ser puestas en evidencia con las nociones ya conocidas. ,De ese modo un acercamiento de las operaciones matemáticas facilitaría la comprensión del edificio único de la estructuración matemática.

En resumen, se puede decir que no basta dejar manipular al niño, sino que hay ciertas manipulaciones que parecen más eficaces que otras porque obedecen a leyes que rigen las construcciones matemáticas por los principios de reversibilidad, de asociatividad, de identidad. Para establecer una didáctica nueva, no basta con aplicar exclusivamente tests de rendimiento o tests sicológicos de aptitudes. Hay que estudiar los mecanismos del desarrollo de las nociones para comprender que, desde el jardín de infantes, se puede preparar al alumno para una mejor comprensión de las nociones y de las operaciones matemáticas.

Ya en la escuela maternal y en el jardín de infantes hay que darle al niño la ocasión de descubrir, gracias a un método heurístico y a un material didáctico apropiado, las relaciones elementales que constituyen finalmente el número y el espacio. Pensamos sobre todo en la ordenación, en las inclusiones, en las correspondencias.

El establecimiento de correspondencias desarrolla la noción de potencia de un conjunto. El material puede ser cualquiera: guijarros, nueces, fichas, etc. Sin que se haya constituído el número el niño juzgará si un camarada tiene más guijarros que él, estableciendo, por ejemplo, correspondencias bi-unívocas. Por las mismas operaciones de correspondencia es que el niño descubre el espacio topológico: las relaciones cualitativas entre ciertos datos perceptivos tales como los nudos, las nociones de izquierda y derecha, de interior y exterior, etc.

La noción de orden tampoco es una noción ya hecha y exige un aprendizaje contínuo: la reproducción de un modelo de acuerdo a un orden dado no es una cosa natural. La ordenación de los objetos según su color, su importancia, su sucesión en una experiencia, o según cualquier otro criterio, exigen un esfuerzo constante del niño.

En fin, las inclusiones deben ser descubiertas empíricamente por los niños. Si los objetos parecidos según un crite-

rio dado (por ejemplo el color) pueden clasificarse por su semejanza o su desemejanza con otros objetos, pueden también pertenecer simultáneamente a una clase más vasta, más general, de acuerdo a un criterio nuevo, de tal modo que la primera clase forma parte de la segunda.

Los ejemplos citados en nuestros capítulos precedentes han demostrado, además, que en un principio no existe conservación del todo considerado, ya que se trabaja sobre las partes. El niño primero se interesa sólo en las relaciones cualitativas entre las partes y el todo. En este caso también tiene el niño necesidad de manipulaciones previas para comprender los mecanismos de las operaciones. El niño no debe actuar realizando una simple reproducción, de acuerdo a reglas establecidas previamente, sino que debe redescubrir, por su cuenta, el mecanismo de las operaciones en juego, fundándose sobre las acciones previas.

Para que el niño reconozca la similitud que existe entre las operaciones geométricas y las operaciones aritméticas sería necesario introducir sistemáticamente, en la escuela primaria, actividades referentes a clases y relaciones de colecciones de objetos individuales, así como también sobre formas, medidas espaciales, etc. Pero si la noción de número es asimilada alrededor de los siete años, la noción correspondiente, en geometría, la de medida, no ha sido adquirida y necesita ejercicios concretos sobre un material contínuo, ejercicios que hay que hacer con los niños para facilitar la asimilación completa de la noción de medida hacia los 8-9 años.

El número no implica simplemente la medida y ambas nociones, aunque parecidas, exigen dos elaboraciones separadas.

Todas estas construcciones, en fin, deberían estar arraigadas en las elaboraciones cualitativas y lógicas, ya que es a partir de ellas que se constituyen las primeras nociones matemáticas.

Por eso se podría prever un programa continuo de la enseñanza matemática que abarcara desde la escuela maternal hasta la escuela secundaria; y consistiría en vincular las secciones a las operaciones matemáticas en el nivel formal. Ese programa podría ser, en lo concerniente a las nociones de número y fracción, el siguiente: en la **escuela maternal** y en el **jardín de infantes**, se introducirían los primeros problemas cualitativos, que llevarían a la formación de los agrupamientos lógicos de las clases y las relaciones. Estos problemas consistirían, ante todo, en clasifi-

caciones de objetos, en reunión de objetos parecidos y en disociación de objetos disímiles, a fin de conducir al niño a percibir la noción de clase. Otros problemas consistirían en seriaciones de objetos de acuerdo con un criterio cualquiera, a fin de introducir la noción de relación. Estas dos nociones fundamentales son las que constituyen el número, pero sólo mediante ciertas condiciones: las relaciones que distinguen los conjuntos de clases deben ser caracterizadas por la equivalencia de las diferencias entre ellas. Esto implica ejercicios concretos preparatorios, consistentes en correspondencias biunívocas y counívocas de colecciones, etc. En cuanto a la preparación de la noción de fracción depende de ejercicios realizados con un material continuo: los niños de la escuela maternal y del jardín de infantes son todavía demasiado pequeños para percibir la fracción como tal, pero hay problemas concretos que preparan para los elementos de base que, también ellos, son de orden cualitativo.

En efecto, la conservación del todo indispensable para esa noción de fracción: si la parte es primero concebida aisladamente, más tarde sólo será comprendida en relación con el todo invariante, relación que caracteriza bien la reversibilidad del pensamiento. En esta edad se pueden introducir problemas de orden, de topología simple por las correspondencias de situaciones especiales cualitativamente parecidas, etc. Estos ejercicios ayudarán mejor a percibir el espacio geométrico que luego se dividirá en pedazos. Los seccionamientos simples, por ejemplo las particiones dicotómicas, ya pueden ser introducidas a esta edad. Conducirán al niño a percibir los agrupamientos aditivos de las clases "vicariantes" y de las relaciones simétricas.

Tanto en aritmética como en geometría, lo esencial de los ejercicios de manipulación concreta está en la relación de la parte al todo: ya se clasifiquen colecciones de objetos o se considere una parte de un objeto, siempre subsiste esa relación de inclusión y si, ante todo, existe un aspecto cualitativo, éste será precisamente cuantificado en la escuela primaria.

La escuela primaria debería, por lo tanto, poder disponer de las experiencias que los niños han hecho en el jardín de infantes por sus manipulaciones concretas. Se podría comenzar exigiendo de los niños cuantificaciones extensivas de las relaciones entre la parte y el todo; estas primeras cuantificaciones groseras son las que transformarán el agrupamiento lógico en grupo matemático. Entonces serán nece-

sarias otras precisiones: la asociatividad, que permite alcanzar resultados por medio de soluciones diferentes; la "invariance" lógica y numérica caracterizada por la reversibilidad. Desde un principio el niño debería tener conciencia de que la adición es la operación inversa de la sustracción y que la división es la operación inversa de la multiplicación, implicando tempranamente la noción de los números negativos y de los números racionales. Pero éstos exigen primero una preparación aditiva, parecida a la construcción de la noción de número. La trisección y otros seccionamientos distintos de las dicotomías simples y sucesivas sólo se podrán introducir en el correr de los primeros años escolares, a medida que sean posibles las anticipaciones mentales. Esos ejercicios concretos serán indispensables para una buena marcha del calculo de las fracciones sistemáticas que sólo serán emprendidas más tarde. Esto será posible con la introducción de equivalencias correspondientes a las equivalencias de números enteros. Por lo tanto se pasará de los ejercicios de forma $3 + 7 = 8 + 2$ a los de forma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{7}{12}, \text{ etc.}$$

Estos ejercicios concretos, para vincular las nociones de fracción conducirán al grupo multiplicativo de los números racionales y es entonces que el niño se liberará enteramente de la necesidad de manipular objetos. Desde ese momento combinará las proposiciones entre sí, ya que éstas estarán bien elaboradas, tanto concreta como hipotéticamente. Ese pasaje será también el signo de que se pueden comenzar las operaciones formales que permitan abordar la enseñanza de las matemáticas (en la **escuela secundaria**) por los procedimientos del pensamiento axiomático e hipotético deductivo.

Hardi Fischer

OFICINA INTERNACIONAL DE EDUCACION

Publicación N.o 170

INDICE

La Dirección de "**Enciclopedia de Educación**" no se responsabiliza sino por las publicaciones propias o que aparezcan sin firma, y que se considerarán como suyas; la responsabilidad de las que aparezcan subscriptas por personas extrañas a la Dirección de "**Enciclopedia de Educación**", corresponderá exclusivamente a sus autores.

Publíquense o no los trabajos que se remitan para "**Enciclopedia de Educación**", los manuscritos originales no serán devueltos en ningún caso.

CANJE

Se ruega a las Empresas de publicaciones, tanto nacionales como extranjeras, a quienes enviamos "**Enciclopedia de Educación**", *quieran aceptar el canje.*

Además solicitamos el canje a todas aquellas publicaciones análogas, a las cuales, por no tener noticia de su existencia, o por otra causa, no hayamos enviado "**Enciclopedia de Educación**".

Consejo Nacional
de Enseñanza Primaria y Normal
Sección Publicaciones y Canje

Soriano 1045
MONTEVIDEO, (Uruguay)
América del Sur

Imprenta Nacional — Nº 41265